Kapitel XII

Elektroschwaches Standardmodell

Im vorigen Kapitel wurden unterschiedliche Modelle der Schwachen Wechselwirkung diskutiert, entsprechend sukzessiven Verfeinerungen, um experimentelle Daten zu beschreiben. Trotz deren Nützlichkeit besitzen diese phänomenologischen Modelle aber viele unerklärten Parameter und beruhen nicht auf einem einfachen Prinzip wie die QED und die QCD.

In Abschn. XII.1 wird argumentiert, dass ein solches grundlegendes Prinzip — die Invarianz der Theorie unter lokalen Symmetrien — tatsächlich notwendig ist, damit die Theorie wohldefiniert ist. Diese Forderung fungiert somit als Auswahlskriterium für mögliche Theorien. In Abschn. XII.2 wird dann ein passendes Modell eingeführt, das sowohl die schwache Wechselwirkung als auch die QED und die QCD umfasst, wobei die zwei Ersteren zu einer *elektroschwachen Wechselwirkung* vereinheitlicht werden. Die folgenden Abschnitte befassen sich dann mit Vorhersagen im Rahmen dieses Modells, und zwar im Higgs-Sektor (Abschn. XII.3), im Eichbosonen-Sektor (Abschn. XII.4) und schließlich im Fermionen-Sektor (Abschn. XII.5).

XII.1 Eichtheorien

Die Wechselwirkungen des Standardmodells sind Theorien mit Invarianz unter lokalen Symmetrietransformationen der Felder, sog. Eichtransformationen. Dies gewährleistet die Renormierbarkeit der Theorie, schränkt aber die möglichen Terme ein, die in der Theorie auftreten dürfen.

XII.1.1 Notwendigkeit nach Renormierbarkeit

Die in Teil B eingeführte Berechnung der Zerfallsraten oder Wirkungsquerschnitte beruht auf Störungsrechnung, wobei bisher nur der Beitrag der niedrigsten Ordnung, entsprechend den einfachsten Feynman-Diagrammen, berücksichtigt wurde. Eine wichtige Frage ist dann natürlich, ob die höheren Ordnungen der Störungstheorie klein gegen die niedrigste Ordnung sind, damit der störungsrechnerische Ansatz überhaupt Sinn macht.

Um diese Frage zu beantworten, kann man als Beispiel einen zwei-nach-zwei-Streuprozess in der QED betrachten, mit zwei Fermionen im Anfangs- und zwei Fermionen im Endzustand. Das Feynman-Diagramm für die niedrigste Ordnung in Störungsrechnung — das sog. „Baum-Niveau“, entsprechend der baumartigen Topologie des Diagramms — und eines der Diagramme für die nächste Ordnung — hier mit einer einzigen Fermionen-Schleife — werden in Abb. XII.1 dargestellt.

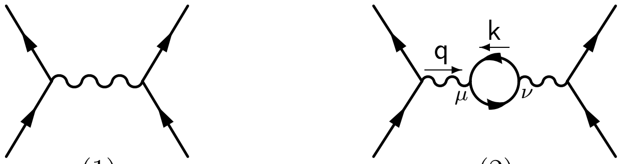
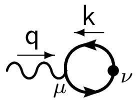


Abbildung XII.1 – „Baum-Niveau“ (1) und 1-Schleifen-Niveau (2) für einen 2-nach-2-Streuprozess.

Im Vergleich zur Amplitude für das Baum-Niveau (1) lautet die Größenordnung der Amplitude entsprechend dem Feynman-Diagramm (2):

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) *$$ 

Die Anwendung der Feynman-Regeln (Kap. VIII) gibt

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \frac{\mathrm{i}\,e^2}{\mathsf{q}^2} \int \mathrm{Tr}\left[\mathrm{i}\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}(\not{\mathsf{k}}+m)}{\mathsf{k}^2-m^2}\,\mathrm{i}\gamma^\nu \frac{\mathrm{i}(\not{\mathsf{q}}+\not{\mathsf{k}}+m)}{(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2-m^2}\right] \frac{\mathrm{d}^4\mathsf{k}}{(2\pi)^4},$$

wobei m die Masse des Fermions in der Schleife bezeichnet. Der globale Faktor i (Regel ⑦) wurde nicht explizit eingeführt, weil er schon in der Amplitude $\mathcal{M}(1)$ auftritt. Die Formeln (IV.8)–(IV.10) zusammen mit $\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\big) = 4\big(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu}\big)$ liefern

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \frac{-4\mathrm{i}e^2}{\mathsf{q}^2} \int \frac{k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu + 2k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu}(\mathsf{k}\cdot\mathsf{q} + \mathsf{k}^2 - m^2)}{(\mathsf{k}^2-m^2)[(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2-m^2]} \frac{\mathrm{d}^4\mathsf{k}}{(2\pi)^4}$$

Das Integral im rechten Glied ist aber divergent, und zwar auf zwei Weisen:

- „Auf der Massenschale“: für $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^{\,2}+m^2}$ und $k_0 = -q_0 \pm \sqrt{(\vec{q}+\vec{k})^{\,2}+m^2}$ verschwindet der Nenner.

  Diese Divergenz lässt sich aber unter Verwendung einer genaueren Definition der Propagatoren vermeiden: fügt man einen Term $\mathrm{i}\varepsilon$ im Nenner hinzu, wobei $\varepsilon = 0^+$ ein infinitesimal kleiner positiver Parameter ist, so findet man, wie es mit diesen Polen umgegangen wird.

- „Ultraviolett-Divergenz“: für große Werte von $|\vec{k}|$ ist das Integral ebenfalls divergent.

  Der letzte Teil des Zählers im Integranden lässt sich in der Tat wie folgt umformen:

  $$\mathsf{k}\cdot\mathsf{q} + \mathsf{k}^2 - m^2 = \mathsf{k}^2 + \tfrac{1}{2}\big[(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2 - \mathsf{q}^2 - \mathsf{k}^2\big] - m^2 = \tfrac{1}{2}(\mathsf{k}^2-m^2) + \tfrac{1}{2}\big[(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2 - m^2\big] - \tfrac{1}{2}\mathsf{q}^2.$$

  Daher enthält das Integral einen Anteil

  $$-\eta^{\mu\nu}\left\{\int \frac{1}{\mathsf{k}^2-m^2}\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{k}}{(2\pi)^4} - \frac{\mathsf{q}^2}{2}\int \frac{1}{(\mathsf{k}^2-m^2)[(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2-m^2]}\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{k}}{(2\pi)^4}\right\},$$

  wobei ein Summand mithilfe der Substitution $\mathsf{q}+\mathsf{k} \to \mathsf{k}$ umgeschrieben wurde. Das erste Integral ist quadratisch divergent — d.h. $\propto \Lambda^2$, wobei Λ die obere Grenze des Integrals über $|\vec{k}|$ bezeichnet, die dann gegen unendlich gehen soll —, das zweite logarithmisch divergent (d.h. $\propto \ln\Lambda$).

Die durch die höheren Ordnungen bedingten Korrekturen scheinen also im Allgemeinen nicht klein, sondern gar unendlich zu sein, was katastrophal aussieht. In diesem Fall wäre Störungsrechnung tatsächlich ganz unbrauchbar.

Eigentlich existieren Klassen von sog. *renormierbaren* Theorien, in denen sich alle solche Divergenzen kürzen — Ordnung für Ordnung in Störungsrechnung —, wenn man Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen betrachtet. In solchen Theorien kann man also sinnvoll Störungsrechnung durchführen und dabei endliche Ergebnisse erhalten.

Somit kann man die Argumentation herumdrehen, und vom Anfang an erfordern, dass die Theorie renormierbar — und damit wohldefiniert — sein soll.

XII.1.2 Eichinvarianz

In der Quantenfeldtheorie zeigt man, dass die folgenden Bedingungen hinreichend sind, damit eine Theorie renormierbar ist

- die Lagrange-Dichten für die Vektorfelder — in der uns bekannten Elementarteilchenphysik handelt es sich um die Photonen, Gluonen, $W^{\pm}$- und Z^0-Bosonen — sollen *eichinvariant* sein;
- die Lagrange-Dichte enthält nur Wechselwirkungsterme zwischen drei (fermionischen oder bosonischen) oder vier (bosonischen) Feldern.[(73)]

Dabei bedeutet „Eichinvarianz“, dass die Theorie invariant unter bestimmten *lokalen* Transformationen der Felder sein soll, ähnlich den Transformationen der Spinoren in Gl. (X.18) mit x-abhängigen Phasen $\alpha(\mathsf{x})$ und mit einer gleichzeitigen Transformation der Vektorfelder wie in Gl. (III.6) für das Vektorpotential des Elektromagnetismus.

Betrachtet man z.B. den Fall der QED, so ist es wohl bekannt, dass die Maxwell-Gleichungen invariant sind unter den lokalen Transformationen [vgl. Gl. (III.6)]

$$\hat{A}^{\mu}(\mathsf{x}) \to \hat{A}'^{\mu}(\mathsf{x}) = \hat{A}^{\mu}(\mathsf{x}) + \frac{1}{e}\partial^{\mu}\alpha(\mathsf{x}) \tag{XII.1}$$

wobei $\alpha(\mathsf{x})$ eine skalare Funktion und e die Kopplungskonstante sind. Wie in der Bemerkung unter Gl. (III.9) schon erwähnt wurde, verhindert diese Eichinvarianz das Einführen eines Massenterms für das Vektorfeld $\hat{A}^{\mu}$.

Solche Massenterme sind — unabhängig, ob das Feld skalar, spinoriell, oder vektoriell ist — quadratische Terme in der Lagrange-Dichte. Damit die Letztere Lorentz-invariant bleibt, ist der einzige mögliche Beitrag für ein Vektorfeld der Art $\frac{1}{2}m^2\hat{A}_{\mu}\hat{A}^{\mu}$.[(74)] Unter einer Eichtransformation (XII.1) wird aber ein solcher Term zu

$$\frac{1}{2}m^2\hat{A}'_{\mu}\hat{A}'^{\mu} = \frac{1}{2}m^2\hat{A}_{\mu}\hat{A}^{\mu} + \frac{m^2}{e}\hat{A}^{\mu}\partial_{\mu}\alpha + \frac{m^2}{e^2}\partial^{\mu}\alpha\,\partial_{\mu}\alpha \neq \frac{1}{2}m^2\hat{A}_{\mu}\hat{A}^{\mu},$$

d.h. der Term verletzt die Invarianz und darf daher nicht auftreten. Somit dürfen in eichinvarianten Theorien die Vektorfelder keinen Massenterm in der Lagrange-Dichte haben. Das ist ja kein Problem für die zwei eichinvarianten Wechselwirkungen, die bisher in dieser Vorlesung behandelt wurden, und zwar die QED und die QCD, weil die Photonen und die Gluonen masselos sind. Will man aber eine eichinvariante Theorie für die schwache Wechselwirkung finden, so werden die Massen der $W^{\pm}$ und Z^0-Bosonen problematisch.

Für ein zu $\hat{A}^{\mu}$ gekoppeltes skalares Teilchen lautet die Eichtransformation, die gleichzeitig zur Transformation (XII.1) des Vektorfeldes stattfinden soll

$$\hat{\phi}(\mathsf{x}) \to \hat{\phi}'(\mathsf{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(\mathsf{x})}\hat{\phi}(\mathsf{x}), \qquad \hat{\phi}^{\dagger}(\mathsf{x}) \to \hat{\phi}'^{\dagger}(\mathsf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\mathsf{x})}\hat{\phi}^{\dagger}(\mathsf{x}). \tag{XII.2}$$

Dann kann ein Massenterm $m^2\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi}$ problemlos in der Lagrange-Dichte auftreten, da er Lorentz- und eichinvariant ist. Somit können Spin-0-Teilchen in einer eichinvarianten Theorie eine Masse haben.

(73) Dabei können die Fermionen bzw. die Bosonen nur den Spin $\frac{1}{2}$ bzw. den Spin 0 oder 1 haben, was alle bisher betrachteten Elementarteilchen umfasst.

(74) Der Faktor $\frac{1}{2}m^2$ liefert die gute Bewegungsgleichung, und zwar die Proca-Gleichung, wenn man die Euler–Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Dichte betrachtet.

Im Fall eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens verhalten sich die links- und rechtshändigen Anteile von Dirac-Spinoren manchmal unterschiedlich unter Wechselwirkungen — insbesondere unter der schwachen Wechselwirkung —, so dass jedem Anteil eine Masse zugeordnet sollte. Dabei lautet aber ein solcher Massenterm z.B.

$$m\hat{\bar{\psi}}_{\mathrm{L}}\hat{\psi}_{\mathrm{L}} = m\hat{\bar{\psi}}\mathcal{P}_{\mathrm{R}}\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\hat{\psi} = 0$$

[vgl. Gl. (IV.43b)], d.h. das Teilchen soll masselos sein. Hier auch stellt also die Masse der fermionischen Elementarteilchen ein Problem dar, um eine konsistente Theorie zu bilden.

Die Aufgabe einer zufriedenstellenden Theorie für die schwache Wechselwirkung wird also vielfach sein. Einerseits soll sie eichinvariant sein, um deren Renormierbarkeit zu gewährleisten. Dazu soll sie noch erklären, wieso die schwachen Bosonen ($W^{\pm}$, Z^0) und die Fermionen (Leptonen und Quarks) eine Masse erhalten können. Eigentlich wird das Letztere möglich sein, indem die Theorie ein neues Feld enthält, und zwar ein Skalarfeld, das mit den anderen Feldern wechselwirkt, und ihnen somit unter Umständen eine Masse geben kann.