

XI.2.3 Flavour-Mischung im $V - A$ -Modell

Bisher wurden nur die Terme im Wechselwirkungsterm der Lagrange-Dichte geschrieben, die den u/d -Quark-Viererstrom mit dem e^-/ν_e -Viererstrom koppeln. Dadurch können nur die wenigen Prozesse zwischen den entsprechenden Teilchen beschrieben werden.

Um weitere Prozesse zu beschreiben — insbesondere solche, die zur Verletzung der Strangeness, des Charms oder der Beauty führen —, sollen zuerst geeignete Terme in die Lagrange-Dichte des $V - A$ -Modells eingeführt werden. Beispielsweise erfordert das Modellieren der Zerfälle $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ und $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ die Einführung einerseits von zwei zusätzlichen Strömen $\hat{\psi}_{\nu_\mu, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\mu, L}$ und $\hat{\psi}_{u, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{s, L}$, und andererseits von drei Termen, die den μ^-/ν_μ -Viererstrom mit dem e^-/ν_e -Viererstrom, dem u/d -Quark-Viererstrom oder dem u/s -Quark-Viererstrom koppeln, wie z.B.

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2} G_F (\hat{\psi}_{\nu_\mu, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\mu, L} \hat{\psi}_{e, L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{\nu_e, L} + \hat{\psi}_{\mu, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu, L} \hat{\psi}_{\nu_e, L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{e, L}) \quad (\text{XI.8})$$

für den Myon-Zerfall. Dabei weicht aber die Kopplungskonstante von derjenigen im Wechselwirkungsterm (XI.7b) ab.

Somit stellt sich die Frage der Stärke der Kopplung zwischen den neu eingeführten Strömen. Ist diese Kopplung universell, bis auf vielleicht die Einführung von für jeden Strom spezifischen „Ladungen“, ähnlich den elektrischen Ladungen Q_i in der QED [Gl. (IX.4)]? In diesem Fall weist der Vergleich der Wechselwirkungsterme (XI.7b) und (XI.8) z.B. darauf hin, dass der Quark-Strom $\hat{\psi}_{u, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{d, L}$ mit einer Ladung kommt, die 0,974 mal der Ladung des leptonen Stroms $\hat{\psi}_{\nu_\mu, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\mu, L}$ beträgt. Oder soll für jeden Wechselwirkungsterm zwischen zwei Strömen eine neue Kopplungskonstante eingeführt werden? Im letzteren Fall würde die Anzahl der Kopplungskonstanten, die freie Parameter des Modells sind, quadratisch mit der Anzahl der Ströme wachsen, während im ersten Fall die Anzahl der freien Parameter maximal linear in der Anzahl der Ströme wäre, was schon ein viel einfacheres Modell ergeben würde.

Experimentell hat sich erwiesen, dass die Kopplung und somit die schwache Wechselwirkung zwischen geladenen Strömen universell ist. Dabei tragen die geladenen ℓ^-/ν_ℓ -Ströme der Leptonen ($\ell^- = e^-, \mu^-$ oder τ^-) alle die gleiche Ladung, die als 1 angenommen werden kann. Dagegen sind die Ladungen, die durch die geladenen q_{f_1}/q_{f_2} -Ströme der Quarks — mit $q_{f_1} = u, c$ oder t und $q_{f_2} = d, s$ oder b — getragen werden, nicht so einfach. Betrachtet man aber geladene Ströme, die der Umwandlung von positiv elektrisch geladenen Quarks (Typ q_{f_1}) in passende Linearkombinationen q'_{f_2} der negativ geladenen Quarks (Typ q_{f_2}) entsprechen, so erhält man geladene Ströme, die ebenfalls eine Ladung 1 bezüglich der schwachen Wechselwirkung tragen.

Diese Idee wird hiernach mehr detailliert dargestellt. Der Einfachheit halber werden in diesem Paragraph nur die u, d, s und c Quarks einerseits und nur die zwei leichtesten geladenen Leptonen e^- und μ^- mit den zugehörigen Neutrinos andererseits berücksichtigt — mit Ausnahme von den Definitionen (XI.9) und (XI.12) der Lepton- und Quark-Dubletts. Die Verallgemeinerung auf alle Quark-Flavours bzw. Arten von Leptonen wird in späteren Kapiteln diskutiert.

XI.2.3a Fermionen-Generationen

Die bekannten elementaren Fermionen werden traditionell drei *Generationen* zugeordnet, wobei jede Generation aus zwei Leptonen und zwei Quark-Flavours besteht. Darüber hinaus wird es sich als günstig erweisen, die Leptonen einer Generation — und zwar ein elektrisch geladenes Lepton und das zugehörige Neutrino — als ein Lepton-Dublett zu schreiben:

$$L_1 \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad L_2 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad L_3 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \quad (\text{XI.9a})$$

wobei die elektrisch neutralen in der ersten Komponente und die geladenen (mit $Q = -1$) in der zweiten Komponente vorkommen. In ähnlicher Weise bilden die Quarks einer Generation — eines

des „ u -Typs“, d.h. mit elektrischer Ladung $+\frac{2}{3}$, und eines des „ d -Typs“ mit elektrischer Ladung $-\frac{1}{3}$ entsprechende Quark-Dubletts

$$Q_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad Q_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad Q_3 \equiv \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{XI.9b})$$

mit den positiv bzw. negativ geladenen Quarks in der ersten bzw. zweiten Komponente.

Es seien \hat{L}_i, \hat{Q}_i die entsprechenden Feldoperatoren und $\hat{L}_{i,L}, \hat{Q}_{i,L}$ die zugehörigen linkshändigen Anteile, wie z.B.

$$\hat{L}_{1,L} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{\nu_e,L} \\ \hat{\psi}_{e,L} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{1,L} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{u,L} \\ \hat{\psi}_{d,L} \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung dieser Dubletts lässt sich die Lagrange-Dichte (XI.8) des $V-A$ -Modells für die schwachen Prozesse zwischen den leptonischen μ^-/ν_μ^- und e^-/ν_e^- -Viererströmen in der Form

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2} G_F \left[\hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} + \hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} \right] \quad (\text{XI.10})$$

schreiben. Wiederum ist die Lagrange-Dichte (XI.7b) für schwache Prozesse zwischen Quarks und Leptonen der ersten Generation äquivalent zu

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2} G_F \left[\hat{Q}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} + \hat{Q}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} \right], \quad (\text{XI.11})$$

wie sich einfach nachprüfen lässt.

Die Frage ist jetzt, wie diese Lagrange-Dichten verallgemeinert werden sollen, wenn zusätzliche Kopplungen zwischen Dubletts eingeführt werden.

XI.2.3b Cabibbo-Winkel

Eine überraschende experimentelle Entdeckung ist, dass die anscheinend „natürlichen“ Quark-Dubletts (XI.9b) — bestehend je aus zwei Teilchen mit bestimmten Massen — bezüglich der schwachen Wechselwirkung nicht optimal sind. Um geladene Quark-Viererströme zu bilden, die einfach miteinander oder mit den geladenen Leptonen-Strömen wechselwirken, sollte man die unteren Komponenten der Dubletts, d.h. Quarks des d -Typs, durch Linearkombinationen davon ersetzen

$$Q'_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad Q'_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad Q'_3 \equiv \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.12})$$

Betrachtet man momentan nur zwei Generationen,⁽⁶⁹⁾ so können d' und s' durch die d und s Quarks mithilfe einer Mischungsmatrix ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.13})$$

Dabei wird θ_C Cabibbo^(bk)-Winkel genannt.

Bemerkung: In Gl. (XI.12) und (XI.13) wurde die gewöhnliche Schreibweise benutzt, die die Mischung auf der Ebene der Teilchen darstellt. Tatsächlich handelt es sich um eine Mischung deren

⁽⁶⁹⁾Die Verallgemeinerung auf drei Generationen wird in § ?? unten diskutiert.

^(bk)N. CABIBBO, 1935–2010

Feldoperatoren: die Freiheitsgrade d', s', b' stehen für Operatoren $\hat{\psi}_{d'}, \hat{\psi}_{s'}, \hat{\psi}_{b'}$, die Linearkombinationen der Operatoren $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_s, \hat{\psi}_b$ sind.

Mit diesen neuen Dubletts, und ohne Änderung der Lepton-Dubletts, lässt sich die Lagrange-Dichte (XI.11) verallgemeinern auf

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2} G_F \sum_{D_L, D'_L} \hat{D}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{D}'_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}'_L, \quad (\text{XI.14})$$

wobei die Summe über alle Dubletts $D, D' \in \{Q'_1, Q'_2, L_1, L_2\}$ läuft. Somit koppeln alle Dubletts mit der gleichen Stärke zueinander — vergleicht man diese Lagrange-Dichte mit der der QED, Gl. (IX.4), so tritt kein Analogon der elektrischen Ladungen auf.

Experimentell beträgt der gemessene Wert des Cabibbo-Winkels etwa $\theta_C \approx 13^\circ$, entsprechend $|V_{us}| = 0,2252 \pm 0,0009$.

Beispiele

Sei zunächst bemerkt das rein leptonische Prozesse, wie der Zerfall $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$, nur die Lepton-Dubletts L_1 und L_2 in Gl. (XI.14) hineinziehen, so dass der Cabibbo-Winkel dabei keine Rolle spielt.

Als erstes nicht-triviales Anwendungsbeispiel der verallgemeinerten Lagrange-Dichte (XI.14) kann man den Term für die Kopplung zwischen den u - und d -Quarks, dem Elektron e^- und dessen Neutrino ν_e in der Lagrange-Dichte (XI.14) explizit schreiben. Der zugehörige Koeffizient ist $-2\sqrt{2} G_F \cos \theta_C$, der mit $-2\sqrt{2} G'_F$ in Gl. (XI.7b) zu vergleichen ist. Dank dem Wert von θ_C , der $\cos \theta_C \approx 0,974$ gibt, findet man eigentlich das gleiche Ergebnis wieder.

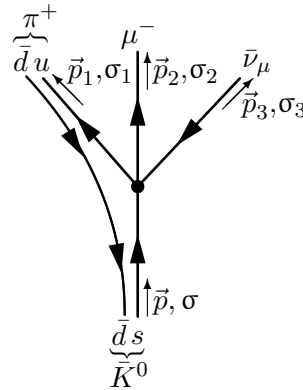


Abbildung XI.4 – Darstellung des Zerfalls $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

Ein zweites Beispiel ist der Zerfall $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ (Abb. XI.4). Dieser Prozess wird durch den Term in der Summe von Gl. (XI.14) beschrieben, der den Strom für ein einlaufendes s -Quark ($\hat{\psi}_s$) und ein auslaufendes u -Quark ($\hat{\psi}_u$) mit dem Strom für ein auslaufendes Myon ($\hat{\psi}_\mu$) und ein auslaufendes Antineutrino ($\hat{\psi}_{\nu_\mu}$) koppelt. Der fermionische Strom entspricht trivial dem Dublett L_2 der zweiten Generation. Für die Quarks tritt das u -Quark nur im Dublett Q'_1 auf. Somit wird der Zerfall beschrieben durch den Term

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2} G_F \hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{Q}'_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}'_{1,L} &= -2\sqrt{2} G_F \hat{\psi}_{\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \hat{\psi}_{u,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{d',L} \\ &= -2\sqrt{2} G_F \sin \theta_C \hat{\psi}_{\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \hat{\psi}_{u,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{s,L}. \end{aligned}$$

Die Kopplung ist hier multipliziert mit $\sin \theta_C \approx 0,225$.

Nach Anwendungen der Feynman-Regeln des Kapitels VIII liefert dieser Term die Amplitude

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{\sqrt{2}} G_F \sin \theta_C \bar{u}(\vec{p}_1, \sigma_1) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(\vec{p}_2, \sigma_2),$$

wobei \vec{p} , σ der Impuls und die Helizität des einlaufenden s -Quarks sind, während sich die Indices 1, 2, 3 jeweils auf die auslaufenden u -Quark, Myon und $\bar{\nu}_\mu$ beziehen. Unabhängig von den Werten der Impulse wird das Betragsquadrat jener Amplitude proportional zu $\sin^2 \theta_C \approx 0,05$ sein.

XI.2.4 Neutrale Ströme

Die Lagrange-Dichte (XI.14) beschreibt nur Wechselwirkungen zwischen geladenen Strömen der Art $\hat{\psi}_k \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_i$ mit $k \neq i$, wobei die Teilchen i und k unterschiedliche elektrische Ladungen tragen. Theoretische Überlegungen, die unten in § XI.3.2 kurz erläutert werden, haben zur Vorhersage geführt, dass die schwache Wechselwirkung noch weitere Prozesse zwischen *neutralen Strömen* — und zwar Linearkombinationen von $\hat{\psi}_i \gamma^\rho \hat{\psi}_i$ und $\hat{\psi}_i \gamma^\rho \gamma_5 \hat{\psi}_i$ — enthält.

Diese schwachen neutralen Ströme besitzen aber nicht die einfache $V-A$ -Struktur der geladenen Ströme. Sie sind nämlich der Form

$$\hat{\psi}_i (c_V \gamma^\rho - c_A \gamma^\rho \gamma_5) \hat{\psi}_i,$$

wobei die zwei Koeffizienten c_V , c_A im Allgemeinen ungleich sind und von der Teilchenspezies i abhängen — genauer findet man experimentell, dass sie nur von der elektrischen Ladung des Teilchens abhängen. Bezeichnet man als c_V^u und c_A^u bzw. c_V^d und c_A^d die Koeffizienten für die obere bzw. untere Komponente eines Dubletts $D \in \{Q'_1, Q'_2, L_1, L_2\}$, so kann man einen neutralen Strom⁽⁷⁰⁾

$$(\hat{j}^{\text{NC}})^\rho \equiv \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma^\rho (c_V^u - c_A^u \gamma_5) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma^\rho (c_V^d - c_A^d \gamma_5) \end{pmatrix} \hat{D} \quad (\text{XI.15a})$$

bilden. Dann lautet der Beitrag der neutralen Ströme zur Lagrange-Dichte der schwachen Wechselwirkung

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{\text{NC}} = -2\sqrt{2} G_F (\hat{j}^{\text{NC}})^\rho (\hat{j}^{\text{NC}})_\rho. \quad (\text{XI.15b})$$

Zum Vergleich lässt sich der Anteil (XI.14) der geladenen Ströme als

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{\text{CC}} = -2\sqrt{2} G_F (\hat{j}^{\text{CC}})^\rho (\hat{j}^{\text{CC}})_\rho^\dagger \quad (\text{XI.16a})$$

mit dem geladenen Strom⁽⁷⁰⁾

$$(\hat{j}^{\text{CC}})^\rho \equiv \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma^\rho (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) & 0 \end{pmatrix} \hat{D}, \quad (\hat{j}^{\text{CC}})_\rho^\dagger = \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \gamma_\rho (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}. \quad (\text{XI.16b})$$

umschreiben.

Die schwache Wechselwirkung neutraler Ströme wurde 1973 am CERN entdeckt, und zwar in der Untersuchung elastischer Streuprozesse $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$, in den weder geladene Ströme noch die elektromagnetische oder starke Wechselwirkungen eine Rolle spielen.

Bemerkungen:

* Für Neutrinos ν_e , ν_μ und ν_τ gilt $c_V = c_A$. Somit spielen auch bei neutralen Strömen nur die linkshändigen Anteile von Neutrinos eine Rolle.

* Der neutrale Strom (XI.15a) ist eine Summe von Termen, die jeweils nur ein einziges Dublett involvieren, statt unterschiedliche Dubletts miteinander zu mischen. Dementsprechend kann der Wechselwirkungsterm (XI.15b) den Flavour eines Quarks bzw. die Art eines Leptons nicht ändern. Diese bisher experimentell bestätigte Tatsache wird als die Abwesenheit von *Flavour-ändernden neutralen Strömen* bezeichnet.⁽⁷¹⁾

⁽⁷⁰⁾NC und CC stehen jeweils für *neutral current* und *charged current*.

⁽⁷¹⁾Auf Englisch spricht man von „flavor-changing neutral currents“, kurz FCNC.