X.3.3 Symmetrien der QED und der QCD

Die Lagrange-Dichten der Quantenchromodynamik, die zu den Vertices der Abb. X.8 führt, und der Quantenelektrodynamik, Gl. (IX.4), sind invariant unter verschiedenen Symmetrien, d.h. unter der Wirkung von Gruppen von Transformationen. Dabei unterscheidet man, je nach der Gruppe, zwischen kontinuierlichen und diskreten Symmetrien.

Laut dem Noether[(ba)]-Theorem liefert jede kontinuierliche Symmetrie der Lagrange-Dichte eine Erhaltungsgröße. Beispielsweise sind Lagrange-Dichten konstruktionsgemäß Lorentz-invariant, was insbesondere die Erhaltung der Energie, des Impulses sowie des Drehimpulses zur Folge hat.

In diesem Paragraph werden ein paar solche Symmetrien mit den zugehörigen Erhaltungsgrößen diskutiert. Diese schränken die möglichen Prozesse ein, die durch die Wechselwirkungen erlaubt werden. Dazu kommen einige diskrete Symmetrien, die ebenfalls die Dynamik einschränken.

X.3.3 a Kontinuierliche innere Symmetrien

Neben den Lorentz-Transformationen in der Raumzeit findet man noch Transformationen auf „inneren" Vektorräumen, z.B. auf dem Hilbert-Raum der Zustände, die ein bzw. mehrere Teilchen beschreiben. Hiernach werden nur solche Transformationen betrachtet, unter denen die Zustände in jedem Punkt der Raumzeit identisch transformiert werden, d.h. sog. *globale Transformationen* der Zustände. Es existieren auch lokale Transformationen — die Eichtransformationen —, die hier nicht weiter diskutiert werden.

Leptonen- und Baryonenzahl

Eine erste Symmetrie der bisher betrachteten Wechselwirkungen ist die Invarianz der Lagrange-Dichte (IX.4) der QED unter den gleichzeitigen Transformationen

$$\hat{\psi}_j \to \hat{\psi}'_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\hat{\psi}_j, \qquad \hat{\bar{\psi}}_j \to \hat{\bar{\psi}}'_j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\bar{\psi}}_j, \qquad \hat{A}_\mu \to \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu \tag{X.18}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $\hat{\psi}_j$ den Feldoperator für ein beliebiges Fermion j (Lepton oder Quark) bezeichnet. Diese Symmetrie funktioniert, weil es an jedem Vertex (IX.3) so viele ein- als auslaufende Fermionenlinien gibt, entsprechend der gleichen Anzahl von $\hat{\psi}_j$ und $\hat{\bar{\psi}}_j$-Operatoren im Wechselwirkungsterm.

Infolge dieser Symmetrie ist die Nettoanzahl der Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen der Art j, d.h. die Anzahl der Teilchen minus der Anzahl ihrer Antiteilchen, in einem quantenelektrodynamischen Prozess erhalten. Summiert man über alle Leptonspezies bzw. über alle Quark-Flavours und -Farben, so gibt diese Symmetrie die Erhaltung der Leptonenzahl $\mathcal{L}$ bzw. der Baryonenzahl $\mathcal{B}$.

Ähnlich dieser globalen Symmetrie der QED ist die Lagrange-Dichte der QCD invariant unter den ortsunabhängigen Transformationen

$$\hat{q}_f \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\hat{q}_f, \qquad \hat{\bar{q}}_f \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\bar{q}}_f \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \tag{X.19}$$

für einen Quark-Flavour q_f, während die Feldoperatoren für alle anderen Flavours und für die Gluonen unverändert bleiben. Diese Invarianz der Lagrange-Dichte spiegelt sich in der Tatsache wider, dass der Quark-Flavour an einem qqg-Vertex (Abb. X.8 links) unverändert ist. Assoziiert mit diesen Symmetrien existieren verschiedene erhaltene Quantenzahlen, die jetzt diskutiert werden.

Strangeness, Charm, Beauty

Aus der Invarianz der Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik unter der Multiplikation des Feldoperators für s-Quarks durch eine beliebige Phase folgt die Erhaltung der Strangeness. Anders gesagt ist die Nettoanzahl der strange Quarks, d.h. die Anzahl der s-Quarks minus der Anzahl der $\bar{s}$-Antiquarks, erhalten.[(50)]

Daraus folgt, dass Mesonen wie $K^+ = u\bar{s}$ und $K^- = s\bar{u}$ in der QCD nicht zerfallen können, weil es kein leichteres Hadron mit Strangeness gibt.

[(50)] Da die Strangeness des s-Quarks als $S = -1$ definiert ist, ist die Strangeness tatsächlich gleich dem Negativen der Nettoanzahl der s-Quarks.

[(ba)] E. Noether, 1882–1935

In ähnlicher Weise sind Charm C, Beauty (oder „Bottomness") B und Truth (oder „Topness") T ebenfalls in der QCD erhalten, wobei C als die Nettoanzahl der c-Quarks, B als Minus der Nettoanzahl der b-Quarks, und T als die Nettoanzahl der t-Quarks definiert wird.

Bemerkung: S, C, B und T werden auch in der QED erhalten, entsprechend der schon oben diskutierten Symmetrie (X.18).

Starker Isospin

Man könnte noch auch „Upness" bzw. „Downness" definieren, um die Nettoanzahl der an einem Prozess beteiligten u- bzw. d-Quarks zu beschreiben. Diese sind wieder in der QCD erhalten dank der Invarianz der Lagrange-Dichte unter den Transformationen (X.19) für $\hat{\psi}_u$- oder $\hat{\psi}_d$-Feldoperatoren.

In der Praxis betrachtet man eine größere Symmetrie, die exakt wird, falls elektromagnetische Effekte sowie die Massendifferenz zwischen u- und d-Quarks können vernachlässigt werden. Unter solchen Umständen ist die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik tatsächlich invariant unter Transformationen der Art

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_u \\ \hat{\psi}_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{\psi}'_u \\ \hat{\psi}'_d \end{pmatrix} \equiv \mathcal{U} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_u \\ \hat{\psi}_d \end{pmatrix}, \tag{X.20}$$

wobei $\mathcal{U}$ eine beliebige spezielle unitäre 2×2-Matrix ist, $\mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$. Die entsprechende Symmetrie der QCD wird *Isospin-Symmetrie* genannt, oder auch *starker Isospin*.[51] Die zugehörige Symmetriegruppe wird als SU(2)-*Flavour-Gruppe* bezeichnet.[52]

Jede Isospin-Transformation $\mathcal{U}$ lässt sich als Exponential einer Linearkombination der Pauli-Matrizen σ_j schreiben:

$$\mathcal{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\,\vec{\sigma}\cdot\vec{e}}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und einem dreidimensionalen Einheitsvektor $\vec{e}$ [vgl. Gl. (A.20)]. Solche SU(2)-Matrizen beschreiben auch die Drehungen im Spin-Vektorraum von nicht-relativistischen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen — woraus die Bezeichnung Isospin tatsächlich folgt.[53]

Die Invarianz der Lagrange-Dichte der QCD unter Transformationen (X.20) bedeutet, dass der zugehörige Hamilton-Operator mit jeder Matrix σ_j kommutiert, wobei σ_j auf dem zweidimensionalen Vektorraum wirkt, der durch die zwei leichten Flavours aufgespannt wird. Somit können der Hamilton-Operator, $\hat{I}^2 \equiv \frac{1}{4}\vec{\sigma}^{\,2}$ und $\hat{I}_3 \equiv \frac{1}{2}\sigma_3$ gleichzeitig diagonalisiert werden. Infolgedessen lassen sich die stark-wechselwirkenden Teilchen, d.h. die Eigenzustände zum QCD-Hamilton-Operator, durch deren Werte von I und I_3 klassifizieren, wobei $I(I+1)$ bzw. I_3 der zugehörige Eigenwert zu $\hat{I}^2$ bzw. $\hat{I}_3$ ist. Solche Eigenzustände können dann mit $|I, I_3\rangle$ bezeichnet werden.

Zum Beispiel gelten für das u-Quark, entsprechend dem ersten Basisvektor im Flavour-Raum, $I = \frac{1}{2}$ und $I_3 = \frac{1}{2}$, während das d-Quark $I = \frac{1}{2}$ und $I_3 = -\frac{1}{2}$ hat:[54]

$$u \equiv |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, \qquad d \equiv |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{X.21}$$

Zusammen bilden die u- und d-Quarks ein Isospin-Dublett („Iso-Dublett").

Bei den Antiquarks nimmt I_3 den entgegengesetzten Wert zum entsprechenden Quark an, d.h. $I_3 = -\frac{1}{2}$ für das $\bar{u}$-Antiquark, $I_3 = \frac{1}{2}$ für das $\bar{d}$: bezüglich des Isospins hat ein $\bar{u}$- bzw. $\bar{d}$-Antiquark die gleichen Quantenzahlen wie ein d- bzw. u-Quark. Genauer gilt im Flavour-Raum[54]

$$\bar{u} \equiv |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle, \qquad \bar{d} \equiv -|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle. \tag{X.22}$$

[51] Da die u- und d-Quarks unterschiedliche elektrische Ladungen haben, ist der Isospin keine Symmetrie der QED. Dagegen sind Upness und Downness in der QED erhalten.

[52] Diese Flavour-Gruppe ist eine Untergruppe der $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{f}$-Flavour-Gruppe von Gell-Mann und Ne'eman. Die Letztere lässt sich wiederfinden, indem man die Massendifferenz des s-Quarks und der zwei leichteren Quarks vernachlässigt, was schon eine stärkere Näherung darstellt.

[53] Ursprünglich wurde der Isospin nicht als Symmetrie der u und d-Quarks, sondern als Symmetrie zwischen Proton und Neutron durch Heisenberg eingeführt [34], vgl. auch Gl. (X.25).

[54] In Gl. (X.21), (X.22) und (X.24)–(X.27) werden nur die „Isospin-Anteile" der Zustände gezeigt.

Schließlich tragen alle anderen Quarks und Antiquarks keinen Isospin, d.h. entsprechen dem $|0,0\rangle$-Isospin-Zustand.

Das Minus-Vorzeichen beim $\bar{d}$ in Gl. (X.22) lässt sich wie folgt erklären.
Sei $\psi = \alpha\, u + \beta\, d$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ein Isospinor im Flavour-Raum und $\psi^{\rm c}$ der ladungskonjugierte Isospinor, der das Antiteilchen zu ψ beschreibt. Wenn ψ unter einer Isospin-Transformation (X.20) zu $\mathcal{U}\,\psi$ wird, soll $\psi^{\rm c}$ mit der komplex konjugierten Matrix $\mathcal{U}^*$ transformiert werden:[55] $\psi^{\rm c} \to \mathcal{U}^*\psi^{\rm c}$. Zum anderen soll der transformierte Isospinor $\mathcal{U}^*\psi^{\rm c}$ weiter ladungskonjugiert zu $\mathcal{U}\,\psi$ sein, d.h.

$$\mathcal{U}^*\psi^{\rm c} = (\mathcal{U}\,\psi)^{\rm c}.$$

Diese Forderung kann mit $\psi^{\rm c} = {\rm i}\sigma_2\psi$ — und ähnlich $(\mathcal{U}\,\psi)^{\rm c} = {\rm i}\sigma_2(\mathcal{U}\,\psi)$ — erfüllt werden,[56] wobei σ_2 die zweite Pauli-Matrix bezeichnet. Insbesondere findet man (für die Flavour-Raum-Komponenten) $u^{\rm c} = d$ und $d^{\rm c} = -u$, was genau Gl. (X.22) ist.

Bemerkung: Der Wert der Isospin-Komponenten I_3 ist einfach mit der elektrischen Ladung Q verknüpft. Für die u, d und s-Quarks und deren Antiquarks gilt die *Gell-Mann–Nishijima*[bb]*-Formel*

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathcal{B} + S), \tag{X.23a}$$

mit der Baryonenzahl $\mathcal{B}$ und der Strangeness S. Verallgemeinert man auf b, c und t Quarks, so erhält man

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathcal{B} + S + C + B + T). \tag{X.23b}$$

Diese Beziehung gilt noch für die Hadronen.

Die Isospin-Quantenzahlen von Hadronen lassen sich dann aus denen der Quarks erhalten, indem man die Isospins wie übliche Drehimpulse koppelt. Beispielsweise gilt für die Pionen[54][57]

$$\pi^+ = u\bar{d} = |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |1,1\rangle, \qquad \pi^- = d\bar{u} = |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = |1,-1\rangle, \tag{X.24a}$$

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u\bar{u} - d\bar{d}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\big) = |1,0\rangle. \tag{X.24b}$$

Die drei Pionen bilden somit das Isospin-Triplett, kurz „Iso-Triplett“, mit $I = 1$. Sie sollten dann dieselbe Masse haben, weil sie miteinander über die Operatoren $\hat{I}_1 \pm {\rm i}\hat{I}_2$ verknüpft sind, die mit dem Hamilton-Operator vertauschen.

Koppelt man jetzt drei u oder d Quarks, so findet man unter anderen mit $I = \frac{1}{2}$ das Iso-Dublett bestehend aus Proton und Neutron[54]

$$p = |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle, \qquad n = |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{X.25}$$

Dieses Dublett wird kollektiv als *Nukleon* bezeichnet. Die Kopplung führt auch zum Quadruplett der vier Δ-Baryonen mit $I = \frac{3}{2}$, vgl. Tab. X.4.

Allgemeiner wird einem Mehrteilchenzustand aus Hadronen ein Isospin zugeordnet: beispielsweise gilt für die 2-Teilchen-Zustände aus Protonen und Neutronen[54]

$$p + p = |1,1\rangle \quad , \quad n + n = |1,-1\rangle \quad , \quad p + n = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,0\rangle + |0,0\rangle\big) \tag{X.26}$$

und für die Zustände mit einem Nukleon und einem positiv geladenen Pion[54]

[55] Gruppentheoretisch ist ψ in der Fundamentaldarstellung $\mathbf{2}$ der Flavour-Gruppe SU(2) und $\psi^{\rm c}$ in der komplex Konjugierten $\bar{\mathbf{2}}$ — die im Spezialfall von SU(2) äquivalent zur $\mathbf{2}$ ist.

[56] Für jede SU(2)-Matrix $\mathcal{U}$ gilt nämlich $\mathcal{U}^* = {\rm i}\sigma_2\,\mathcal{U}({\rm i}\sigma_2)^{-1}$.

[57] Beim π^+ wurde das Minus-Vorzeichen des $\bar{d}$-Antiquarks weggelassen; dagegen spielt es beim π^0 eine wichtige Rolle.

[bb] K. Nishijima, 1926–2009

$$\pi^+ + p = |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle \quad , \quad \pi^+ + n = \frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle, \tag{X.27}$$

wobei geeignete Clebsch[(bc)]–Gordan[(bd)]-Koeffizienten[(58)] benutzt wurden.

Bemerkung: Der gebundene Zustand aus einem Proton und einem Neutron — das sog. Deuteron, hiernach mit d bezeichnet — hat den Isospin $I = 0$: $\mathrm{d} = |0,0\rangle$. Die Isospin-Komponente des $p+n$-Systems entlang des $|1,0\rangle$-Zustands spielt nur bei Streuzuständen eine Rolle.

Der starke Isospin ist nicht nur für Klassifizierungszwecke nützlich, sondern kann auch benutzt werden, um Vorhersagen über die Dynamik zu machen. Somit führt die Erhaltung des Isospins in starken Prozessen zur Existenz von einfachen Verhältnissen zwischen den Amplituden bzw. Wirkungsquerschnitten für unterschiedliche Endzustände einer Streuung, oder auch zwischen den Amplituden für Prozesse mit Anfangszuständen, die über Isospin-Transformationen verknüpft sind.

Als Beispiel kann man die zwei Streuprozesse (d bezeichnet das Deuteron)

$$\text{(a) } p + p \to \mathrm{d} + \pi^+ \quad , \quad \text{(b) } p + n \to \mathrm{d} + \pi^0$$

betrachten: bei Streuung (a) gilt $I_3 = 1$, während $I_3 = 0$ im Prozess (b). In beiden Fällen hat der Endzustand immer den Isospin $I = 1$ — resultierend aus der Kopplung eines Isospins $I = 0$ mit einem Isospin $I = 1$. Somit ist nur die Projektion des Hamilton-Operators auf dem Unterraum mit $I = 1$ relevant für die zwei Prozesse. Laut Gl. (X.26) besteht der Anfangszustand von (a) aus einem reinen $I = 1$-Zustand, während der Anfangszustand von (b) halb und halb $I = 1$ und $I = 0$ ist: dabei trägt der Anteil mit $I = 0$ nicht zum Streumatrixelement bei. Dann kommt

$$S_{\mathrm{fi}}(\mathrm{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{\mathrm{fi}}(\mathrm{a}),$$

wobei $S_{\mathrm{fi}}(\mathrm{x})$ das Streumatrixelement [Gl. (VI.2)] für den Prozess (x) bezeichnet. Daraus folgt das Verhältnis $\sigma(b)/\sigma(a) = 1/2$ für die zugehörigen Wirkungsquerschnitte.

X.3.3 b Diskrete Symmetrien

Die im vorigen Unterabschnitt diskutierten kontinuierlichen inneren Symmetrien führen zur Existenz von additiven Quantenzahlen. Jetzt werden ein paar diskrete Symmetrien der QED und der starken Wechselwirkung behandelt, und die zugehörigen multiplikativen Quantenzahlen eingeführt.

Parität

Bei der Raumspiegelung handelt es sich um die Transformation, die den Ortsvektor $\vec{r}$ in $-\vec{r}$ transformiert. In der Raumzeit lässt sich die Wirkung der Raumspiegelung auf den Koordinaten-Vierervektor durch eine schon in Gl. (A.28) eingeführte uneigentliche Lorentz-Transformation Λ_P. Allgemeiner lässt sich die Operation dieser Transformation auf eine beliebige physikalische Größe $\mathcal{G}(\mathsf{x})$ durch einen *Paritätsoperator*, auch *Raumspiegelungsoperator* gennant, $\hat{\mathsf{P}}$ beschreiben, und zwar gemäß

$$\hat{\mathsf{P}}\mathcal{G}(\mathsf{x}) = \mathcal{G}(\Lambda_P \mathsf{x}). \tag{X.28}$$

Dieser Operator hängt von der Natur von $\mathcal{G}(\mathsf{x})$ ab — je nachdem, ob es sich um eine skalare, spinorielle, vektorielle, oder tensorielle Größe handelt. In allen Fällen ist $\hat{\mathsf{P}}$ eine Involution, d.h.

$$\hat{\mathsf{P}}^2 = \mathbb{1}.$$

Infolge dieser Eigenschaft sind die möglichen Eigenwerte des Paritätsoperators $\mathsf{P} = \pm 1$. Ist eine Größe ein Eigenvektor zu $\hat{\mathsf{P}}$, so wird der entsprechende Eigenwert P als seine *Parität* bezeichnet.

Je nach dem Verhalten unter der Parität unterscheidet man

[(58)] Einige dieser Koeffizienten können z.B. in der Review of Particle Physics [1], Kap. 44 gefunden werden.

[(bc)] A. Clebsch, 1833–1872 [(bd)] P. Gordan, 1837–1912

- für skalare Größen, zwischen Skalaren — $\hat{\mathsf{P}}s = s$, d.h. $\mathsf{P} = +1$ — und Pseudoskalaren — $\hat{\mathsf{P}}ps = -ps$, d.h. $\mathsf{P} = -1$;
- für vektorielle Größen, zwischen Vektoren — $\hat{\mathsf{P}}\vec{v} = -\vec{v}$, d.h. $\mathsf{P} = -1$ — und *axialen Vektoren* (oder *Pseudovektoren*) — $\hat{\mathsf{P}}\vec{a} = \vec{a}$, d.h. $\mathsf{P} = +1$.

Ein Beispiel für eine pseudoskalare Größe ist die Helizität, Produkt von einem Vektor (dem Impuls) und einem axialen Vektor (dem Spin).

Teilchen, insbesondere Elementarteilchen, können Eigenzustände zum Paritätsoperator sein, und somit eine feste Parität haben. Das ist der Fall der Teilchen, die entweder der QED oder der QCD unterliegen, weil die Lagrange-Dichten jener Wechselwirkungen invariant unter Raumspiegelung sind. Somit haben die Quarks und die geladenen Leptonen (e^-, μ^-, τ^-) die Parität $+1$, während ihre Antiteilchen die Parität -1 haben. Dazu haben Photonen und Gluonen, die durch Vierervektoren beschrieben werden, die Parität -1.

Bei nicht-elementaren Teilchen hängt die Parität von denen der Bestandteilchen ab, sowie vom Bahndrehimpuls, der einen Beitrag $(-1)^\ell$ gibt, mit ℓ der Bahndrehimpulsquantenzahl, wobei die Beiträge multipliziert werden sollen. Somit haben Pionen ($\ell = 0$) die Parität -1.

Ladungskonjugation

Eine weitere diskrete Transformation ist die Ladungskonjugation, die ein Teilchen in dessen Antiteilchen und umgekehrt bei unveränderter Raumzeit-Position transformiert. Man kann zeigen, dass die Lagrange-Dichten der QED und der QCD invariant unter dieser Transformation sind.

Für ein gegebenes Teilchen–Antiteilchen System wird die Ladungskonjugation durch einen Operator $\hat{\mathsf{C}}$ darstellt. Da $\hat{\mathsf{C}}^2 = \mathbb{1}$ ist, sind die möglichen Eigenwerte dieses Ladungskonjugationsoperators $\mathsf{C} = \pm 1$. Die entsprechenden Eigenzustände stellen definitionsgemäß Teilchen dar, die gleich ihrer Antiteilchen sind. Dies betrifft nur wenige Teilchen wie das Photon γ, das neutrale Pion π^0, oder die in Abb. X.1 vorkommenden η, η', ρ^0, ω und ϕ Mesonen, die alle aus u, d und s Quarks und deren Antiquarks bestehen. Dazu kommen noch die sog. *Charmonia* und *Bottomonia*, d.h. die gebundenen $c\bar{c}$- und $b\bar{b}$-Zustände.

Als Beispiel hat das Photon die C-*Parität* $\mathsf{C} = -1$, während für das neutrale Pion $\mathsf{C} = +1$ ist:

$$\hat{\mathsf{C}}\,|\gamma\rangle = -\,|\gamma\rangle, \qquad \hat{\mathsf{C}}\,|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle. \tag{X.29a}$$

Dagegen gilt für die geladenen Pionen

$$\hat{\mathsf{C}}\,|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, \qquad \hat{\mathsf{C}}\,|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle. \tag{X.29b}$$

Wegen der Erhaltung der Ladungskonjugation in der QED und der QCD, sollen die Zerfallsprodukte von $\hat{\mathsf{C}}$-Eigenzustände, die über die QED oder die QCD zerfallen, ebenfalls Eigenzustände zur Ladungskonjugation sein, und zwar mit dem gleichen Eigenwert. Infolgedessen kann das neutrale Pion in 2 oder 4 Photonen zerfallen,[(59)] nicht aber in 3 Photonen.

Bemerkungen:

∗ Der Ladungskonjugationsoperator $\hat{\mathsf{C}}$ ist ein seltenes Beispiel für einen antiunitären Operator.[(60)] Dies ist eine nötige Eigenschaft, um einen normierten Zustand in den dazu komplexen konjugierten Zustand zu transformieren (vgl. die Teilchen-Interpretation der Lösungen zu den Klein–Gordon- oder Dirac-Gleichungen).

∗ Eine verwandte multiplikative Quantenzahl, die in der starken Wechselwirkung erhalten bleibt, ist die sog. G-*Parität*, entsprechend dem Eigenwert des Operators $\hat{\mathsf{G}} \equiv \hat{\mathsf{C}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\hat{I}_2}$, wobei $\hat{I}_2$ die 2-Komponente des Isospins bezeichnet. Das Interesse an dieser G-Parität liegt daran, dass zusätzliche

(59) Dabei wird die Parität auch erhalten, vorausgesetzt die Photonen mit einem relativen Bahndrehimpuls $\ell = 1$ emittiert werden.

(60) Dies bedeutet, dass $\hat{\mathsf{C}}$ einerseits *antilinear* ist: für alle Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und komplexe Zahlen λ_1 und λ_2 gilt $\hat{\mathsf{C}}(\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle) = \lambda_1^*\hat{\mathsf{C}}|1\rangle + \lambda_2^*\hat{\mathsf{C}}|2\rangle$; andererseits ist $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{C}}^\dagger = \hat{\mathsf{C}}^\dagger\hat{\mathsf{C}} = \mathbb{1}$, wobei $\hat{\mathsf{C}}^\dagger$ der adjungierte Operator ist.

Teilchen wie z.B. die geladenen Pionen Eigenzustände dazu sind,[(61)] die nicht Eigenzustand zum Ladungskonjugationsoperator sind.

Zeitumkehr

Eine weitere Transformation, unter welcher die QED und — nach heutigem Wissen — die QCD invariant sind, ist die Zeitumkehr, die die Zeit t in $-t$ bei unveränderten Raumkoordinaten transformiert. Die Wirkung dieser Operation auf Vierervektoren erfolgt durch die Lorentz-Transformation Λ_T, Gl. (A.29).

Allgemeiner wird ein (antiunitärer) Zeitumkehroperator $\hat{\mathsf{T}}$ eingeführt, um die Operation auf Zustände mit bestimmtem Spin durchzuführen. Die möglichen Eigenwerte von $\hat{\mathsf{T}}$ sind $\mathsf{T} = \pm 1$.

Laut dem *CPT-Theorem* ist jede lokale Lorentz-invariante Quantenfeldtheorie invariant unter dem Produkt von Ladungskonjugation ($\hat{\mathsf{C}}$), Raumspiegelung ($\hat{\mathsf{P}}$) und Zeitumkehr ($\hat{\mathsf{T}}$), so dass $\hat{\mathsf{T}}$ äquivalent zu $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$ ist, d.h. zur Transformation, die ein Teilchen mit bestimmter Helizität bzw. Polarisation in das zugehörige Antiteilchen mit entgegengesetzer Helizität bzw. Polarisation überführt. Gleichzeitige Eigenzustände zu $\hat{\mathsf{C}}$ und $\hat{\mathsf{P}}$, wie z.B. alle oben erwähnten Teilchen mit bestimmter C-Parität, sind natürlich Eigenzustände zu $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$, d.h. automatisch zur Zeitumkehr.

Literatur zum Kapitel X

- Berger, *Elementarteilchenphysik* [21], Kap. 5.1 & 5.3.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 4.3–4.4, 8.1–8.3 & 8.6.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 2.5–2.11, 8, 9, 10.1 & 11.1.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 17–18.

[(61)] Dies folgt aus $e^{i\pi \hat{I}_2} |\pi^\pm\rangle = |\pi^\mp\rangle$ und daher $\hat{\mathsf{G}} |\pi^\pm\rangle = |\pi^\pm\rangle$.