

Übung Nr. 6

Diskussionsthema: Was ist die Streumatrix? Wie erhält man Fermis Goldene Regel für Zerfälle?

Aufgabe 19. Weyl-Gleichung

Eine alternative Wahl für die Dirac-Matrizen ist die sog. *chirale* oder *Weyl-Darstellung*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

in der der Chiralitätsoperator γ_5 diagonal wird.

i. Prüfen Sie nach, dass die Matrizen (1) die Beziehung $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$ für alle $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen. Berechnen Sie die Matrixform des „Dirac-Operators“ $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4$ (drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Notation $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \equiv \sum_k \sigma_k \partial_k$ aus).

ii. Berechnen Sie den Chiralitätsoperator $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ in der chiralen Darstellung, sowie die Projektoren $\mathcal{P}_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5)$ und $\mathcal{P}_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5)$. Wenden Sie diese Projektoren auf einen Dirac-Spinor ψ an und folgern Sie daraus, dass sich der Letztere „natürlich“ als

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit zweikomponentigen Spaltenvektoren χ_L, χ_R schreiben lässt.¹

iii. Benutzen Sie den in Frage **i.** berechneten Dirac-Operator und die Notation (2), um die freie Dirac-Gleichung $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$ als System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen für χ_L, χ_R umzuschreiben. Wie vereinfacht sich das System, wenn das durch ψ beschriebene Teilchen masselos ist?

Die resultierenden Gleichungen werden *Weyl-Gleichungen* genannt — und die zweikomponentigen χ_L, χ_R *Weyl-Spinoren*.

Aufgabe 20. Zerfallsrate und mittlere Lebensdauer

Die Zerfallsrate bestimmt die Zeitentwicklung der Teilchenzahl durch $N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$. Zeigen Sie, dass die mittlere Lebensdauer τ eines Teilchens gleich Γ^{-1} ist.

Aufgabe 21. Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t, t_0)$ durch

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = g \hat{V}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (3)$$

mit der Anfangsbedingung $\hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}}$ definiert.

i. Zeigen Sie, dass $\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I(t', t_0) dt'$ ist.

ii. Schreiben Sie die iterative Lösung dieser Gleichung zur Ordnung g^2 auf.

¹Sehr oft wird stattdessen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

geschrieben, was eigentlich ein Missbrauch der Notation ist, denn die normalen links- und rechtshändigen Spinoren $\psi_{L/R} \equiv \mathcal{P}_{L,R}\psi$ sind vierkomponentige Dirac-Spinoren.

iii. Können Sie aus der sich ergebenden Struktur auf die exakte Lösung schließen?

Hinweis: Exponentialfunktion...

Aufgabe 22. Phasenraumintegrationsmaß

In dieser Aufgabe werden natürliche Einheiten verwendet.

Überzeugen Sie sich davon, dass das Maß für die Phasenraumintegration sich in der Lorentz-invarianten Form

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} = \int 2\pi\delta(\mathbf{p}^2 - m^2) \Theta(p^0) \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \quad (4)$$

mit der Heaviside-Funktion Θ schreiben lässt, wobei $\mathbf{p} = (p^0, \vec{p})$ und $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.