

## Übung Nr. 6

**Diskussionsthema:** Was ist die Streumatrix? Wie erhält man Fermis Goldene Regel für Zerfälle?

### Aufgabe 19. Weyl-Gleichung

Eine alternative Wahl für die Dirac-Matrizen ist die sog. *chirale* oder *Weyl-Darstellung*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

in der der Chiralitätsoperator  $\gamma_5$  diagonal wird.

**i.** Prüfen Sie nach, dass die Matrizen (1) die Beziehung  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$  für alle  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  erfüllen. Berechnen Sie die Matrixform des „Dirac-Operators“  $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4$  (drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Notation  $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \equiv \sum_k \sigma_k \partial_k$  aus).

**ii.** Berechnen Sie den Chiralitätsoperator  $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  in der chiralen Darstellung, sowie die Projektoren  $\mathcal{P}_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5)$  und  $\mathcal{P}_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5)$ . Wenden Sie diese Projektoren auf einen Dirac-Spinor  $\psi$  an und folgern Sie daraus, dass sich der Letztere „natürlich“ als

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit zweikomponentigen Spaltenvektoren  $\chi_L, \chi_R$  schreiben lässt.<sup>1</sup>

**iii.** Benutzen Sie den in Frage **i.** berechneten Dirac-Operator und die Notation (2), um die freie Dirac-Gleichung  $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$  als System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen für  $\chi_L, \chi_R$  umzuschreiben. Wie vereinfacht sich das System, wenn das durch  $\psi$  beschriebene Teilchen masselos ist?

Die resultierenden Gleichungen werden *Weyl-Gleichungen* genannt — und die zweikomponentigen  $\chi_L, \chi_R$  *Weyl-Spinoren*.

### Aufgabe 20. Zerfallsrate und mittlere Lebensdauer

Die Zerfallsrate bestimmt die Zeitentwicklung der Teilchenzahl durch  $N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$ . Zeigen Sie, dass die mittlere Lebensdauer  $\tau$  eines Teilchens gleich  $\Gamma^{-1}$  ist.

### Aufgabe 21. Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}_I(t, t_0)$  durch

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = g \hat{V}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (3)$$

mit der Anfangsbedingung  $\hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}}$  definiert.

**i.** Zeigen Sie, dass  $\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I(t', t_0) dt'$  ist.

**ii.** Schreiben Sie die iterative Lösung dieser Gleichung zur Ordnung  $g^2$  auf.

<sup>1</sup>Sehr oft wird stattdessen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

geschrieben, was eigentlich ein Missbrauch der Notation ist, denn die normalen links- und rechtshändigen Spinoren  $\psi_{L/R} \equiv \mathcal{P}_{L,R}\psi$  sind vierkomponentige Dirac-Spinoren.

iii. Können Sie aus der sich ergebenden Struktur auf die exakte Lösung schließen?

*Hinweis:* Exponentialfunktion...

### Aufgabe 22. Phasenraumintegrationsmaß

In dieser Aufgabe werden natürliche Einheiten verwendet.

Überzeugen Sie sich davon, dass das Maß für die Phasenraumintegration sich in der Lorentz-invarianten Form

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} = \int 2\pi\delta(\mathbf{p}^2 - m^2) \Theta(p^0) \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \quad (4)$$

mit der Heaviside-Funktion  $\Theta$  schreiben lässt, wobei  $\mathbf{p} = (p^0, \vec{p})$  und  $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ .