Übung Nr. 5

Diskussionsthema: Zweite Quantisierung bei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Was sind die Helizität und die Chiralität eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 15. Dirac-Gleichung

Sei $\psi(\mathsf{x})$ eine Lösung der Dirac-Gleichung $(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi(\mathsf{x})=0$. Zeigen Sie, dass $\gamma_5\psi(\mathsf{x})$ dann Lösung der Gleichung $(\mathrm{i}\not{\partial}+m)\psi(\mathsf{x})=0$ ist. (*Hinweis*: Aufgabe **13.** iii)

Aufgabe 16. Normierung der Dirac-Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\vec{p},s)=\mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p}+m)\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix},\quad v(\vec{p},s)=\mathcal{N}_-(\vec{p})(\not{p}-m)\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix},\quad \text{mit}\quad \xi_+\equiv\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_-\equiv\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen $\bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s')=2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s')=-2m\delta_{s,s'}$ durch $\mathcal{N}_+(\vec{p})=-\mathcal{N}_-(\vec{p})=(E_{\vec{p}}+m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.
Was folgt dann für $u(\vec{p},s)^\dagger u(\vec{p},s')$ und $v(\vec{p},s)^\dagger v(\vec{p},s')$?

Aufgabe 17. Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\vec{p})\equiv\vec{\mathrm{e}}_{\vec{p}}\cdot\vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5, wobei

$$\vec{\mathrm{e}}_{\vec{p}}\equiv\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|},\quad \vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}&0\\0&\vec{\sigma}\end{pmatrix},$$

mit σ^k den Pauli-Matrizen. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

i. $[h(\vec{p})]^2=\mathbb{1}_4$.

ii. Die Eigenwerte von $h(\vec{p})$ und γ_5 sind gleich ±1 (*Hinweis*: Aufgabe **13.** iii).

iii. Für $\mathcal{P}_\pm^{(h)}\equiv\dfrac{\mathbb{1}_4\pm h}{2}$ gelten die Beziehungen $\left[\mathcal{P}_\pm^{(h)}\right]^2=\mathcal{P}_\pm^{(h)}$ und $\mathcal{P}_+^{(h)}\mathcal{P}_-^{(h)}=\mathcal{P}_-^{(h)}\mathcal{P}_+^{(h)}=0$.

iv. Der Chiralitätseigenwert von $u_{\mathrm{L}}\equiv\mathcal{P}_{\mathrm{L}}u$, mit $\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\equiv\dfrac{\mathbb{1}_4-\gamma_5}{2}$ und u einem Dirac-Spinor „positiver Energie", ist gleich -1

Aufgabe 18. Kinematik von Zerfällen

i. Zwei-Teilchen-Zerfall Ein Teilchen der Masse M zerfalle in zwei andere Teilchen mit Massen m_1, m_2 und Impulsen $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$. Geben Sie die Impulse der Zerfallsprodukte im Schwerpunktsystem an. Kann ein massives Teilchen ein Photon abstrahlen?

ii. Drei-Teilchen-Zerfall Wie sieht es beim Zerfall von einem Teilchen in drei Teilchen aus?