Übung Nr. 4

Diskussionsthema: Zweite Quantisierung bei Spin-1- und Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen.

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 11. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\nu x^\nu), \tag{1}$$

mit x-unabhängigen Vierervektoren ε^μ, n^μ und einer skalaren Funktion f. Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathsf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Form (1) für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen" sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathsf{x}) = 0$ wegtransformiert werden.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Viererpotential (1) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

v. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$ ansetzen.

vi. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\epsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht relativistisch kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

Aufgabe 12. Vollständigkeitsrelation masseloser Spin-1-Teilchen

Zeigen Sie, dass die Polarisationsvektoren für Lösungen der Maxwell-Gleichungen in der Coulomb-Eichung der folgenden Relation genügen:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}.$$

Aufgabe 13. Dirac-Matrizen

i. Zeigen Sie ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, dass die Spur $\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0$ ist.

ii. Zeigen Sie ausgehend von der Dirac-Darstellung der γ^μ, dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ gilt. Was bedeutet das Ergebnis für die Hermitizität der Dirac-Matrizen?

iii. Definieren wir nun $\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Geben Sie den Ausdruck von γ_5 in der Standard-Darstellung an. Zeigen Sie die Eigenschaften

a) $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$; **b)** $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$; **c)** $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$; **d)** $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$.

Aufgabe 14. Dirac-Gleichung

i. Zeigen Sie, dass der Dirac-adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ die Gleichung $\bar{\psi}(\mathsf{x})\big(\mathrm{i}\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\big) = 0$ erfüllt, wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.

ii. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int \bar{\psi}(\mathsf{x})\gamma^0\psi(\mathsf{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.