

## Übung Nr. 13

**Diskussionsthema:** Symmetrieverletzungen der schwachen Wechselwirkung

### Aufgabe 46. Pion–Nukleon-Streuung

Betrachten Sie die elastische Pion–Nukleon-Streuung. Es gibt sechs mögliche Prozesse:

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, & \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p, & \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, \\ \pi^+ + n &\rightarrow \pi^+ + n, & \pi^0 + n &\rightarrow \pi^0 + n, & \pi^- + n &\rightarrow \pi^- + n. \end{aligned}$$

Wie viele unabhängige Amplituden gibt es in diesen Streuprozessen unter der Annahme der exakten Isospinsymmetrie? (Pionen haben  $I = 1$ , Nukleonen  $I = \frac{1}{2}$ ).

### Aufgabe 47. $CP$ -Eigenzustände

Für die zu den zwei neutralen Kaonen  $K^0 = d\bar{s}$  und  $\bar{K}^0 = s\bar{d}$  gehörigen Zustände gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{P}|K^0\rangle &= -|K^0\rangle, & \hat{P}|\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle, \\ \hat{C}|K^0\rangle &= |\bar{K}^0\rangle, & \hat{C}|\bar{K}^0\rangle &= |K^0\rangle. \end{aligned}$$

- i. Können Sie durch Linearkombinationen von  $|K^0\rangle$  und  $|\bar{K}^0\rangle$   $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustände konstruieren?
- ii. Welcher dieser Zustände könnte in zwei, welcher in drei Pionen zerfallen, falls  $CP$  erhalten bleibt?
- iii. Warum können diese Reaktionen nicht innerhalb der QCD auftreten?

### Aufgabe 48. Pion-Zerfall

Nehmen Sie an, dass die Elektronmasse  $m_e$  gleich null ist. Warum kann der Zerfall  $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$  dann nicht stattfinden?

Dies ist eine Erklärung dafür, dass der Zerfall  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  ( $\Gamma_i/\Gamma = 99,99\%$ ) sehr viel häufiger als  $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$  ( $\Gamma_i/\Gamma = 0,01\%$ ) auftritt.

### Aufgabe 49. Links- und rechtshändige Spinoren

Seien  $\mathcal{P}_L \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}$  und  $\mathcal{P}_R \equiv \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2}$ . Zeigen Sie, dass

- i.  $\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \mathcal{P}_L \psi_2 = \bar{\psi}_1 \mathcal{P}_R \gamma^\mu \mathcal{P}_L \psi_2$ ;
- ii.  $\bar{\psi}_1 \mathcal{P}_R \gamma^\mu \mathcal{P}_L \psi_2 = \bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{2L}$ , mit  $\psi_{iL} \equiv \mathcal{P}_L \psi_i$ .

### Aufgabe 50. Zerfall des Myons und des $\tau$ -Leptons

Das Myon und das  $\tau$ -Lepton sind instabil und können beide in das leichtere Elektron zerfallen:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad , \quad \tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau. \quad (1)$$

Die zugehörigen Zerfallsraten und mittleren Lebensdauern werden hiernach mit  $\Gamma_{\mu \rightarrow e}$ ,  $\Gamma_{\tau \rightarrow e}$ ,  $\tau_{\mu \rightarrow e}$ ,  $\tau_{\tau \rightarrow e}$  bezeichnet.

#### i. Experimentelle Fakten

Entnehmen Sie der Review of Particle Physics die mittleren Lebensdauern des Myons und des  $\tau$ -Leptons sowie die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle (1). Folgern Sie daraus die Werte von  $\tau_{\mu \rightarrow e}$  und  $\tau_{\tau \rightarrow e}$  und berechnen Sie das Verhältnis  $\tau_{\tau \rightarrow e}/\tau_{\mu \rightarrow e}$ .

**ii. Theoretische Überlegungen** (ohne Berechnung!)

**a)** Die Fermi- und  $V-A$ -Modelle der schwachen Wechselwirkung beschreiben die Zerfälle (1) mithilfe der jeweiligen 4-Teilchen-Vertizes. In führender Ordnung der Störungsrechnung ist der Beitrag dieser Vertizes zur Amplitude für den Prozess proportional zur Fermi-Konstanten  $G_F$ . Wie skalieren dann die Zerfallsraten  $\Gamma_{\mu \rightarrow e}$ ,  $\Gamma_{\tau \rightarrow e}$  und die Lebensdauer  $\tau_{\mu \rightarrow e}$ ,  $\tau_{\tau \rightarrow e}$  mit  $G_F$ ?

**b)** In einem System „natürlicher Einheiten“ wird die Fermi-Konstante üblicherweise in  $\text{GeV}^{-2}$  angegeben, d.h. sie hat die Dimension  $[G_F] = E^{-2}$ , wobei  $E$  die Basisgröße Energie bezeichnet. In sehr guter Näherung kann man die Masse des Elektrons (und die Massen der Neutrinos und Antineutrinos!) gegenüber den Massen  $m_\mu$ ,  $m_\tau$  der schwereren Leptonen vernachlässigen. Dann kann  $\tau_{\mu \rightarrow e}$  bzw.  $\tau_{\tau \rightarrow e}$  in führender Ordnung der Störungsrechnung nur von  $G_F$  und  $m_\mu$  bzw.  $G_F$  und  $m_\tau$  abhängen.

Geben Sie an, wie  $\tau_{\mu \rightarrow e}$  mit  $G_F$  und  $m_\mu$  unter diesen Annahmen skaliert.

*Hinweis:* „Dimensionsanalyse“ in natürlichen Einheiten.

**c)** Eine detaillierte Berechnung liefert in der Tat die Ergebnisse

$$\tau_{\mu \rightarrow e} \simeq K G_F^\alpha m_\mu^\beta \quad \text{und} \quad \tau_{\tau \rightarrow e} \simeq K G_F^\alpha m_\tau^\beta,$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Potenzen sind, die Sie in **a)** und **b)** gefunden haben, während  $K$  eine reine Zahl<sup>1</sup> ist, die für beide Zerfälle die gleiche ist. Wie lautet dann das Verhältnis  $R^{\text{th}} \equiv \tau_{\tau \rightarrow e} / \tau_{\mu \rightarrow e}$ ? Suchen Sie die Massen  $m_\mu$ ,  $m_\tau$  und vergleichen Sie Ihre theoretische Abschätzung für  $R^{\text{th}}$  mit dem experimentellen Wert aus Frage **i.**.

---

<sup>1</sup>... und zwar  $192\pi^3$