Übung Nr. 5

Diskussionsthema: Was ist die Streumatrix? Wie erhält man Fermis Goldene Regel für Zerfälle?

Aufgabe 17. Zerfallsrate und mittlere Lebensdauer

Die Zerfallsrate bestimmt die Zeitentwicklung der Teilchenzahl durch $N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\Gamma t}$. Zeigen Sie, dass die mittlere Lebensdauer τ eines Teilchens gleich Γ^{-1} ist.

Aufgabe 18. Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_{\mathrm{I}}(t,t_0)$ durch

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{U}_{\mathrm{I}}(t,t_0)}{\partial t} = g\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\hat{U}_{\mathrm{I}}(t,t_0)$$

mit der Anfangsbedingung $\hat{U}_{\mathrm{I}}(t_0,t_0) = \hat{\mathbb{1}}$ definiert.

i. Zeigen Sie, dass $\hat{U}_{\mathrm{I}}(t,t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{\mathrm{i}\,g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{V}_{\mathrm{I}}(t')\hat{U}_{\mathrm{I}}(t',t_0)\,\mathrm{d}t'$ ist.

ii. Schreiben Sie die iterative Lösung dieser Gleichung zur Ordnung g^2 auf.

iii. Können Sie aus der sich ergebenden Struktur auf die exakte Lösung schließen?

Hinweis: Exponentialfunktion...

In den zwei folgenden Aufgaben werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 19. Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls

Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1+2$ im Ruhesystem des Teilchens A. Mit Massen m, m_1, m_2 und Viererimpulsen

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_1 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_1} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_2} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

beträgt die Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{1}{2m}\int \big|\mathcal{M}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\big|^2\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

i. Zeigen Sie, dass nach der Integration über $\vec{p}_1$ gilt

$$\Gamma = \frac{1}{2m}\frac{1}{(4\pi)^2}\int \big|\mathcal{M}(-\vec{p}_2,\vec{p}_2)\big|^2\,\frac{\delta\big(m-\sqrt{m_1^2+\vec{p}_2^{\,2}}-\sqrt{m_2^2+\vec{p}_2^{\,2}}\big)}{\sqrt{m_1^2+\vec{p}_2^{\,2}}\sqrt{m_2^2+\vec{p}_2^{\,2}}}\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2.$$

ii. Es kann vermutet werden, dass $\big|\mathcal{M}(-\vec{p}_2,\vec{p}_2)\big|^2$ nur von $|\vec{p}_2|$ abhängig ist, d.h. als $\big|\mathcal{M}\big|^2(|\vec{p}_2|)$ geschrieben werden kann. Überführen Sie die Zerfallsrate per Winkelintegration in die Form

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi m}\int_0^\infty \big|\mathcal{M}\big|^2(\rho)\,\frac{\delta\big(m-\sqrt{m_1^2+\rho^2}-\sqrt{m_2^2+\rho^2}\big)}{\sqrt{m_1^2+\rho^2}\sqrt{m_2^2+\rho^2}}\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho.$$

iii. Nehmen Sie nun die Variablensubstitution $\rho \to E \equiv \sqrt{m_1^2+\rho^2}+\sqrt{m_2^2+\rho^2}$ vor. Überzeugen Sie sich, dass sich die Zerfallsrate schreiben lässt als

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{8\pi m^2}\big|\mathcal{M}\big|^2(\rho_0)\,\Theta(m-m_1-m_2),$$

wobei $\rho_0 \equiv \frac{1}{2m}\sqrt{m^4+m_1^4+m_2^4-2m^2m_1^2-2m^2m_2^2-2m_1^2m_2^2}$.

iv. Was ist die physikalische Bedeutung von ρ_0? (vgl. Aufgabe **16** i.)

Aufgabe 20. Phasenraumintegrationsmaß

Überzeugen Sie sich davon, dass das Maß für die Phasenraumintegration sich in der Lorentz-invarianten Form

$$\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}} = \int 2\pi\delta(\mathsf{p}^2-m^2)\,\Theta(p^0)\,\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{p}}{(2\pi)^4}$$

mit Θ der Heaviside-Funktion schreiben lässt, wobei $\mathsf{p} = (p^0,\vec{p})$.