Übung Nr. 2

Diskussionsthemen:

– Welche relativistischen Wellengleichungen kennen Sie?
– Was nennt man zweite Quantisierung? Welchen Vertauschungsrelationen genügen die verschiedenen Operatoren?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 5. Viererkraft

Laut dem Newton'schen Gesetz ist die Beschleunigung eines nicht-relativistischen Teilchens proportional zur Kraft $\vec{F}$, die auf das Teilchen wirkt. Wir möchten hier eine vierdimensionale Version dieser Beziehung finden, indem wir einen Vierervektor (die „Viererkraft“) f^μ bestimmen, dessen Raumkomponenten sich im nicht-relativistischen Limes auf die Newton'sche Kraft reduzieren.
Die verallgemeinerte Gleichung soll

$$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = f^\mu \tag{1}$$

lauten, mit u^μ der Vierergeschwindigkeit und τ der Eigenzeit des Teilchens.

Wie lautet der Raumteil der Viererkraft? Und deren Zeitkomponente f^0? Was beschreibt die Zeitkomponente der Gleichung (1)?

Hinweis: Um f^0 zu finden, kann man das Lorentz-Quadrat der Vierergeschwindigkeit benutzen.

Aufgabe 6. Klein–Gordon-Gleichung

Sei $\phi(\mathsf{x})$ eine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung.
Zeigen Sie, dass $\int \mathrm{i}\left[\phi(\mathsf{x})^*\partial_0\phi(\mathsf{x}) - \phi(\mathsf{x})\partial_0\phi(\mathsf{x})^*\right]\mathrm{d}^3\vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 7. Vertauschungsrelation der Klein–Gordon-Felder

Sei $\hat{\phi}(\mathsf{x})$ der Klein–Gordon-Feldoperator und $\hat{\pi}(\mathsf{x}) \equiv \partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger$ das dazu kanonisch konjugierte Feld. Verifizieren Sie die Vertauschungsrelation $\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})\right] = \mathrm{i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$.

Aufgabe 8. Hamilton-Operator des Klein–Gordon-Feldes

Der Hamilton-Operator eines freien komplexen Klein–Gordon-Feldes lautet

$$\hat{H} = \int \left[\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger + \vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\cdot\vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x}) + m^2\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\hat{\phi}(\mathsf{x})\right]\mathrm{d}^3\vec{x}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Entwicklung der Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, dass $\hat{H}$ sich umschreiben lässt als

$$\hat{H} = \int\left[\frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\right)\right]E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p} = \int\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0})\right]E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p}.$$