Übung Nr. 5

Diskussionsthemen:

– Was sind die Helizität und die Chiralität eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens?
– Was ist die Streumatrix? Wie erhält man Fermis Goldene Regel für Zerfälle?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 17. Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5, wobei

$$\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

mit σ^k den Pauli-Matrizen. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

i. $[h(\vec{p})]^2 = \mathbb{1}_4$.

ii. Die Eigenwerte von $h(\vec{p})$ und γ_5 sind gleich ± 1 (*Hinweis*: Aufgabe **10.** iii).

iii. Für $\mathcal{P}_\pm^{(h)} \equiv \dfrac{\mathbb{1}_4 \pm h}{2}$ gelten die Beziehungen $\big[\mathcal{P}_\pm^{(h)}\big]^2 = \mathcal{P}_\pm^{(h)}$ und $\mathcal{P}_+^{(h)}\mathcal{P}_-^{(h)} = \mathcal{P}_-^{(h)}\mathcal{P}_+^{(h)} = 0$.

iv. Der Chiralitätseigenwert von $u_\mathrm{L} \equiv \mathcal{P}_\mathrm{L} u$, mit $\mathcal{P}_\mathrm{L} \equiv \dfrac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}$ und u einem Dirac-Spinor „positiver Energie“, ist gleich -1

Aufgabe 18. Zerfallsrate und mittlere Lebensdauer

Die Zerfallsrate bestimmt die Zeitentwicklung der Teilchenzahl durch $N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\Gamma t}$. Zeigen Sie, dass die mittlere Lebensdauer τ eines Teilchens gleich Γ^{-1} ist.

Aufgabe 19. Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls

Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1 + 2$ im Ruhesystem des Teilchens A. Mit Massen m, m_1, m_2 und Viererimpulsen

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_1 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_1} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_2} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

beträgt die Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \int \big|\mathcal{M}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\big|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}) \, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

i. Zeigen Sie, dass nach der Integration über $\vec{p}_1$ gilt

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \frac{1}{(4\pi)^2} \int \big|\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)\big|^2 \, \frac{\delta\big(m - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^{\,2}} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\big)}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}}} \, \mathrm{d}^3\vec{p}_2.$$

ii. Es kann vermutet werden, dass $\big|\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)\big|^2$ nur von $|\vec{p}_2|$ abhängig ist, d.h. als $\big|\mathcal{M}\big|^2(|\vec{p}_2|)$ geschrieben werden kann. Überführen Sie die Zerfallsrate per Winkelintegration in die Form

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi m} \int_0^\infty \big|\mathcal{M}\big|^2(\rho) \, \frac{\delta\big(m - \sqrt{m_1^2 + \rho^2} - \sqrt{m_2^2 + \rho^2}\big)}{\sqrt{m_1^2 + \rho^2}\sqrt{m_2^2 + \rho^2}} \, \rho^2 \, \mathrm{d}\rho.$$

iii. Nehmen Sie nun die Variablensubstitution $\rho \to E \equiv \sqrt{m_1^2 + \rho^2} + \sqrt{m_2^2 + \rho^2}$ vor. Überzeugen Sie sich, dass sich die Zerfallsrate schreiben lässt als

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{8\pi m^2} \big|\mathcal{M}\big|^2(\rho_0) \, \Theta(m - m_1 - m_2),$$

wobei $\rho_0 \equiv \dfrac{1}{2m}\sqrt{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m^2 m_1^2 - 2m^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}$.

iv. Was ist die physikalische Bedeutung von ρ_0? (vgl. Aufgabe **vi.**)

Aufgabe 20. Mandelstam-Variablen

Betrachten Sie die quasi-elastische Streuung $1 + 2 \to 3 + 4$. Zeigen Sie, dass die Mandelstam-Variablen $s \equiv (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2)^2$, $t \equiv (\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3)^2$ und $u \equiv (\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_4)^2$ nicht unabhängig sind:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$