Übung Nr. 4

Diskussionsthema: Was nennt man zweite Quantisierung? Welchen Vertauschungsrelationen genügen die verschiedenen Operatoren?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 13. Vertauschungsrelation der Klein–Gordon-Felder

Sei $\hat{\phi}(\mathsf{x})$ der Klein–Gordon-Feldoperator und $\hat{\pi}(\mathsf{x}) \equiv \partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger$ das dazu kanonisch konjugierte Feld. Verifizieren Sie die Vertauschungsrelation $\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})\right] = \mathrm{i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$.

Aufgabe 14. Hamilton-Operator des Klein–Gordon-Feldes

Der Hamilton-Operator eines freien komplexen Klein–Gordon-Feldes lautet

$$\hat{H} = \int \Big[\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x}) + \vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger \cdot \vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x}) + m^2\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\hat{\phi}(\mathsf{x})\Big]\,\mathrm{d}^3\vec{x}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Entwicklung der Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, dass $\hat{H}$ sich umschreiben lässt als

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2}\big(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\big) + \frac{1}{2}\big(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\big)\right] E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p} = \int \Big[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0})\Big] E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p}.$$

Aufgabe 15. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\mu x^\mu),$$

mit ε^μ, n^μ x-unabhängigen Vierervektoren und f einer skalaren Funktion. Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathsf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösungen für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen" sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathsf{x}) = 0$ wegtransformiert werden.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

v. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon_\mu\epsilon^\mu = -1$ ansetzen.

vi. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\epsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t,\vec{x})$ und $\vec{A}(t,\vec{x})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

Aufgabe 16. Vollständigkeitsrelation masseloser Spin-1-Teilchen

Zeigen Sie, dass die Polarisationsvektoren für Lösungen der Maxwell-Gleichungen in der Coulomb-Eichung der folgenden Relation genügen:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^{\,2}}.$$