Übung Nr. 3

Diskussionsthemen:

– Welche relativistischen Wellengleichungen kennen Sie?
– Beschreiben Sie qualitativ, in welcher Weise die Dirac-Gleichung die Existenz von Antiteilchen vorhersagt.

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 9. Klein–Gordon-Gleichung

Sei $\phi(\mathsf{x})$ eine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung.
Zeigen Sie, dass $\int \mathrm{i}\left[\phi(\mathsf{x})^*\partial_0\phi(\mathsf{x}) - \phi(\mathsf{x})\partial_0\phi(\mathsf{x})^*\right]\mathrm{d}^3\vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 10. Dirac-Matrizen

i. Zeigen Sie ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, dass die Spur $\operatorname{Tr}\gamma^\mu = 0$ ist.

ii. Zeigen Sie ausgehend von der Dirac-Darstellung der γ^μ, dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ gilt. Was bedeutet das Ergebnis für die Hermitizität der Dirac-Matrizen?

iii. Definieren wir nun $\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Geben Sie den Ausdruck von γ_5 in der Standard-Darstellung an. Zeigen Sie die Eigenschaften
a) $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$; **b)** $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$; **c)** $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$; **d)** $\operatorname{Tr}\gamma_5 = 0$.

Aufgabe 11. Dirac-Gleichung

i. Zeigen Sie, dass der Dirac-adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ die Gleichung $\bar{\psi}(\mathsf{x})\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\big) = 0$ erfüllt, wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.

ii. Zeigen Sie, dass $\int \bar{\psi}(\mathsf{x})\gamma^0\psi(\mathsf{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 12. Normierung der Dirac-Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\vec{p}, s) = c_1(\not{p} + m)\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}, s) = c_2(\not{p} - m)\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \xi_+ \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_- \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen $\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s') = 2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s') = -2m\delta_{s,s'}$ durch $c_1 = -c_2 = (E_{\vec{p}} + m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.
Was folgt dann für $u(\vec{p}, s)^\dagger u(\vec{p}, s')$ und $v(\vec{p}, s)^\dagger v(\vec{p}, s')$?