Übung Nr. 12

Diskussionsthemen:

– Flavour-Mischung im $V-A$-Modell.
– Eichinvarianz.

Aufgabe 44. GIM-Mechanismus

Betrachten Sie den Zerfall $K^0 \to \mu^+ + \mu^-$, wobei $K^0 = d\bar{s}$. Dieser Prozess verlangt eine Umwandlung $d \to u \to s$ oder $d \to c \to s$, so dass sich s und $\bar{s}$ gegenseitig vernichten können, um am Ende nur Leptonen zu haben. Zeigen Sie, ausgehend vom $V-A$-Modell, dass sich die zwei genannten Kanäle gegeneinander kürzen. (Diese Tatsache wird als „GIM-Mechanismus“ bekannt, wobei GIM für Glashow–Iliopoulos–Maiani steht).

Warum ist die Kürzung in der Natur allerdings nicht exakt?

Aufgabe 45. Tadpole-Integral

Betrachten Sie das Integral

$$A(m,\Lambda) \equiv \int_{|\vec{k}|<\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathsf{k}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3},$$

wobei $\mathsf{k}^2 = k_0^2 - \vec{k}^{\,2}$ und $\varepsilon = 0^+$ ein infinitesimal kleiner positiver Parameter ist. Wie verhält sich $A(m,\Lambda)$ für $\Lambda \gg m$?

Hinweis: Das k_0-Integral wird am einfachsten per Residuensatz berechnet.

Aufgabe 46. Bubble-Integral

Betrachten Sie nun das Integral

$$B(m,\mathsf{q},\Lambda) \equiv \int_{|\vec{k}|<\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mathsf{k}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon)[(\mathsf{q}+\mathsf{k})^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon)]} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3},$$

wobei wiederum $\varepsilon = 0^+$. Wie verhält sich $B(m,\mathsf{q},\Lambda)$ für $\Lambda \gg m, q_0, |\vec{q}|$?

Hinweis: Sollte Ihnen diese Aufgabe so zu schwer fallen, können Sie $\mathsf{q}^2 \ll m^2$ annehmen und eine Taylor-Entwicklung in q^2 durchführen.

Aufgabe 47. Eichtransformation

Angenommen die Felder $\hat{\phi}$ und $\hat{A}_\mu$ transformieren unter sog. Eichtransformationen gemäß

$$\hat{\phi}(\mathsf{x}) \to \hat{\phi}'(\mathsf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\mathsf{x})}\,\hat{\phi}(\mathsf{x})$$
$$\hat{A}_\mu(\mathsf{x}) \to \hat{A}'_\mu(\mathsf{x}) = \hat{A}_\mu(\mathsf{x}) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\mathsf{x}).$$

Zeigen Sie, dass $\hat{\mathcal{L}} \equiv \big(\hat{D}_\mu\hat{\phi}\big)^\dagger \big(\hat{D}^\mu\hat{\phi}\big)$ mit $\hat{D}_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}e\hat{A}_\mu$ „eichinvariant“ ist, d.h. dass $\hat{\mathcal{L}}' = \hat{\mathcal{L}}$ gilt.