

Übungsblatt Nr.8

Diskussionsthema / Kontrollfragen:

Phasenübergänge: Was nennt man latente Wärme? Wie lautet die Clausius–Clapeyron-Gleichung? Wie sieht das Phasendiagramm in der \mathcal{P} - T -Ebene aus? Was versteht man unter einem kritischen Punkt? Welche besonderen Eigenschaften zeichnen kritische Punkte aus?

20. Kritischer Exponent des van der Waals-Fluids

i. Seien $\mathcal{P}_c, \mathcal{V}_c, T_c$ die Zustandsvariablen beim kritischen Punkt des van der Waals-Fluids. Man definiert dimensionslose Größen durch

$$\mathcal{P}_r \equiv \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} - 1, \quad \mathcal{V}_r \equiv \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_c} - 1, \quad \varepsilon \equiv \frac{T}{T_c} - 1.$$

Zeigen Sie, dass die van der Waals-Zustandsgleichung in der Form

$$\mathcal{P}_r(2 + 7\mathcal{V}_r + 8\mathcal{V}_r^2 + 3\mathcal{V}_r^3) = -3\mathcal{V}_r^3 + 8\varepsilon(1 + 2\mathcal{V}_r + \mathcal{V}_r^2).$$

umgeschrieben werden kann.

ii. Wie verhält sich \mathcal{V}_r im Limes $T \rightarrow T_c^-$? und im Limes $T \rightarrow T_c^+$? Folgern Sie daraus den Wert des in der Vorlesung definierten kritischen Exponenten β .

21. Approximative Dampfdruckkurve

Im Phasengleichgewicht von Dampf und Flüssigkeit bleibt nur noch eine unabhängige intensive Zustandsgröße. Diese sei im Folgenden die Temperatur T . Folglich hängt der Druck \mathcal{P} von T ab.

Leiten Sie aus der Clausius–Clapeyron-Gleichung die Funktion $\mathcal{P}(T)$ unter folgenden Annahmen her: Der Dampf kann als ein ideales Gas beschrieben werden; sein molares Volumen ist viel größer als das der flüssigen Phase. Die latente Wärme ist temperaturunabhängig.¹

22. Approximative flüssig-fest-Gleichgewichtskurve

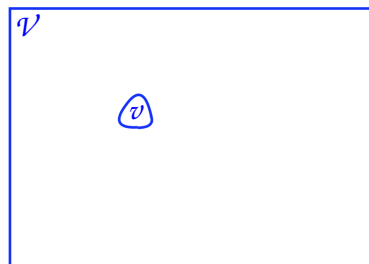
i. Leiten Sie aus der Clausius–Clapeyron-Gleichung die Funktion $\mathcal{P}(T)$ für das Phasengleichgewicht von flüssiger und fester Phase unter der Annahme her, dass die latente Wärme sowie die molaren Volumina temperaturunabhängig seien.

ii. Skizzieren Sie das \mathcal{P} - T -Phasendiagramm für eine Substanz mit fester, flüssiger und gasförmiger Phase.

iii. Erklären Sie, warum die Phasengrenze zwischen fest und flüssig im \mathcal{P} - T -Diagramm so steil verläuft.

23. Dichtefluktuationen

Ein Behälter mit dem Volumen \mathcal{V} enthält N Teilchen, die stochastisch unabhängig voneinander und in \mathcal{V} gleichförmig verteilt sind. Die Anzahl n der in einem kleinen Volumen \mathcal{v} enthaltenen Teilchen ist eine Zufallsvariable.



¹Diese letzte Annahme ist nicht ganz korrekt.

i. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, n Teilchen in \mathcal{V} zu finden, durch die Binomialverteilung

$$p_n = \binom{N}{n} \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'}\right)^n \left(1 - \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'}\right)^{N-n}$$

gegeben ist.

ii. Prüfen Sie, dass $\langle n \rangle = \frac{N\mathcal{V}}{\mathcal{V}'}$.

iii. Berechnen Sie die Standard-Abweichung σ_n von n . Es sei ein Gas unter normalen Bedingungen ($T = 25^\circ\text{C}$, $\mathcal{P} = 10^5 \text{ Pa}$). Für welche Werte von \mathcal{V} ist die relative Fluktuation $\sigma_n/\langle n \rangle$ kleiner als 10^{-6} ?