

Übungsblatt Nr.15

Diskussionsthemen:

- Was sind die Fermi-Dirac- und die Bose-Einstein-Verteilung?
- Was ist die Zustandsdichte?
- Was sind die Fermi-Energie und die Fermi-Temperatur? Wann kann man ein ideales Fermi-Gas als ein Gas bei Temperatur Null beschreiben?

45. Fermionen in zwei Dimensionen

Sei ein Gas aus freien Elektronen, deren Bewegung auf eine Ebene eingeschränkt wird.

- i. Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\varepsilon)$ unabhängig von der Energie ε ist.
- ii. Bestimmen Sie die Fermi-Energie in Abhängigkeit von der Teilchendichte.
- iii. Zeigen Sie, dass das chemische Potential bei tiefen Temperaturen exponentiell nach der Fermi-Energie geht.

46. Relativistisches ideales Fermi-Gas

Die Dichte eines idealen Gases aus Fermionen der Masse m sei so hoch, dass $\hbar/(\mathcal{V}/N)^{1/3} \gg mc$ gilt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Dann sind die meisten Impulse hochrelativistisch, $p \equiv |\vec{p}| \gg mc$, und man kann näherungsweise die Beziehung $\varepsilon \approx pc$ verwenden, die bei masselosen Teilchen exakt ist.

- i. Berechnen Sie die Zustandssumme in drei Raumdimensionen.
- ii. Berechnen Sie das großkanonische Potential und zeigen Sie, dass sich die thermische Zustandsgleichung dieses Gases in der Form $\mathcal{P}\mathcal{V} = U/3$ schreiben lässt.

47. Neutronenstern

Nach dem Verbrauch seines nuklearen „Brennstoffs“ kollabiert ein Stern mit einer Masse von etwa $10 M_{\odot}$ zu einem *Neutronenstern*, wobei $1 M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg die Masse der Sonne bezeichnet. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass ein solcher Neutronenstern ausschließlich aus entarteten Neutronen besteht, deren Dichte im ganzen Stern konstant ist. Sei \mathcal{N}_n die Zahl von Neutronen im Stern und \mathcal{V} das Sternvolumen.

- i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines großen Kerns ($n_{\infty} = 0,17 \text{ fm}^{-3}$) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen Neutronen bei Temperatur Null beschrieben werden kann. Geben Sie die entsprechende Fermi-Energie ε_F an.

Hinweis: Die Masse eines Neutrons ist $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

- ii. Berechnen Sie den Druck und vergleichen Sie diesen mit dem Druck eines klassischen idealen Gases bei derselben Temperatur.
- iii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R . Diese besteht aus zwei Beiträgen, und zwar aus der inneren Energie $U(R)$ und der Gravitationsenergie $E_G(R)$.

Hinweis: Zur Berechnung der letzteren kann man die Arbeit der Gravitationskräfte betrachten, die geleistet werden muss, um eine Kugelschale der Dicke dr vom Unendlichen bis zur Oberfläche einer Kugel des Radius r zu bringen.

- iv. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_{eq} , bei dem die Energie $E(R)$ minimal wird. Was bemerken Sie? Berechnen Sie den Zahlenwert dieses Radius für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4 M_{\odot}$.