Übungsblatt Nr.10

Diskussionsthema / Kontrollfragen:

- Welches Prinzip liegt der Wahl des Dichteoperators entsprechend einem bestimmten makroskopischen physikalischen Zustand zugrunde? Wie werden mögliche Nebenbedingungen dabei berücksichtigt?
- Mikrokanonisches und kanonisches Ensemble.
- (Wiederholung Quantenmechanik) Der quantenmechanische harmonische Oszillator...

28. Anzahl von Mikrozuständen

Die molare Entropie von Wasser (molare Masse: 18 $\mathrm{g\,mol^{-1}}$) unter normalen Bedingungen ist etwa 70 $\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$. Schätzen Sie die Anzahl der möglichen Mikrozustände für ein 1 mg Wasser unter der Annahme, dass alle diese Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind.

Hinweis: Die genaue Zahl ist irrelevant: benutzen Sie $\mathrm{e}^3 \approx 20$ in ihrer Berechnung.

29. Harmonischer Oszillator

In dieser Aufgabe wird die Anzahl der Mikrozustände mit einer Energie kleiner als ein Wert E für einen eindimensionalen harmonischer Oszillator mit Masse m unter Kreisfrequenz ω untersucht.

i. Quantenmechanischer Oszillator

Wie lauten die Energieniveaus des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators? Folgern Sie daraus die Anzahl der (Mikro)Zustände, die eine Energie kleiner als E haben.

ii. Klassischer Oszillator

Zur Erinnerung: die Hamilton-Funktion des betrachteten harmonischen Oszillators lautet

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{1}$$

Wie viele Mikrozustände haben eine Energie kleiner als E? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Frage **i.**

Hinweis: Welche geschlossene Kurve im Phasenraum entspricht der Gesamtenergie E?

30. Wechselwirkungsfreie Spins

Betrachten Sie ein System von $N \gg 1$ nicht-wechselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem homogenen äußeren Magnetfeld $\vec{B}$, dessen Richtung die z-Achse definiert. Die Teilchen können also nur zwei Zustände einnehmen: entweder parallel oder antiparallel zum Magnetfeld. Die kinetische Energie der Teilchen sei vernachlässigbar klein — z.B. magnetische Momente in einem Isolator. Dann hat der Hamilton-Operator des Systems die Form

$$\hat{\mathsf{H}} = -\sum_{i=1}^{N} mB\hat{\sigma}_z^{(i)}, \tag{2}$$

wobei m das magnetische (Dipol)Moment und $\sigma_z^{(i)}$ die Pauli-Matrix ist, die als Operator die z-Komponente des i-ten Spins angibt.

i. a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Hamilton-Operators (2) durch

$$E_n = -(2n - N)mB \tag{3}$$

gegeben sind, wobei n die Anzahl der parallel zum Feld ausgerichteten Spins ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl $W(E_n)$ der (Mikro)Zustände mit Energie E_n.

ii. Berechnen Sie mikrokanonisch unter Verwendung der Stirling-Formel die (statistische) Entropie S als Funktion von E_n. Nehmen Sie dabei an, dass sowohl n als auch $N-n$ groß sind. Zeigen Sie, dass sich für große Teilchenzahlen der Ausdruck für die Entropie in der Form

$$S(E_n) = -k_B N \big[a \ln a + (1-a)\ln(1-a)\big] \tag{4}$$

mit $a \equiv \frac{1}{2}(1 - E_n/NmB)$ bringen lässt.

iii. Sei angenommen, dass N groß genug ist, um das Energiespektrum $\{E_n\}$ als kontinuierlich anzunehmen: statt E_n wird die Energie als U bezeichnet. Berechnen Sie die Temperatur aus

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_N.$$

iv. Drücken Sie die (innere) Energie U als Funktion der Temperatur T aus.

v. Berechnen Sie das gesamte magnetische Moment M des Systems als Funktion von Temperatur T und Magnetfeld B.

31. Gefälschter Würfel

In Beobachtungen eines nicht isotropen sechsseitigen Würfels wurde die Augenzahl 6 zweimal öfter als die 1 gewürfelt. Über das Auftreten der anderen Augenzahlen weiß man nichts. Wenden Sie das Prinzip der maximalen Entropie an, um jeder Augenzahl eine Auftretenswahrscheinlichkeit p_m mit $1 \leq m \leq 6$ zuzuordnen.