Übungsblatt Nr.1 (Präsenzübungen)

Diskussionsthema: Totales Differential einer Funktion

1. Totales Differential

Die Eigenschaft einer Größe, ein totales Differential zu besitzen, ist in vielen Gebieten der Physik von Interesse bzw. von Vorteil. Frischen Sie deshalb Ihre Kenntnisse über totale Differentiale auf (⇒ Diskussionsthema) und lösen Sie die folgenden Probleme.

i. Stellen Sie sich vor, der folgende Ausdruck

$$\delta U = U_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\,\mathrm{d}\mathcal{S} + U_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{1}$$

sei gegeben. Dabei sind $U_{\mathcal{S}}$ und $U_{\mathcal{V}}$ irgendwelche Funktionen von unabhängigen Variablen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{V}$. Sie sollen herausfinden, ob δU ein totales Differential ist. Was machen Sie da? Geben Sie an, welche Bedingung die Funktionen $U_{\mathcal{S}}$ und $U_{\mathcal{V}}$ erfüllen müssen, damit δU ein totales Differential ist.

ii. Überprüfen Sie *durch Integration*, ob

$$\delta f = (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

ein totales Differential ist. Integrieren Sie dabei von $(x, y) = (1, 1)$ nach $(2, 2)$ entlang den folgenden Wegen:

a) $\mathcal{C}_1$: zwei Teilstrecken von (1, 1) nach (2, 1) und von (2, 1) nach (2, 2);

b) $\mathcal{C}_2$: zwei Teilstrecken von (1, 1) nach (1, 2) und von (1, 2) nach (2, 2);

c) $\mathcal{C}_3$: entlang der Diagonalen von (1, 1) nach (2, 2).

Was müsste gelten, wenn δf ein totales Differential wäre?

iii. Geben Sie Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Physik an, bei denen Größen ein totales Differential haben.

2. Integrierender Faktor

Betrachten Sie nochmals die Differentialform auf der rechten Seite der Gl. (2). Wir wollen jetzt eine Funktion $g(x, y)$ finden, so dass

$$g(x, y)\delta f = (x^2 - y)g(x, y)\,\mathrm{d}x + xg(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

jetzt ein totales Differential ist.

i. Unter welcher Bedingung (vgl. Aufgabe **1.i.**) ist $g(x, y)\delta f$ ein totales Differential? Sie sollten finden, dass $g(x, y)$ eine partielle Differentialgleichung (erster Ordnung) erfüllt.

ii. Versuchen Sie, die gefundene Differentialgleichung mit dem Ansatz $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ zu lösen. Dabei sollten Sie nach wenigen Schritten (Vorsicht bei einem Schritt!) auf die Gleichung

$$(x^2 - y)\frac{\mathrm{d}\ln g_2(y)}{\mathrm{d}y} - x\frac{\mathrm{d}\ln g_1(x)}{\mathrm{d}x} = 2 \tag{4}$$

kommen. Überzeugen Sie sich, dass die Ableitung von $\ln g_2(y)$ verschwinden muss, damit es Lösungen dieser neuen Gleichung geben kann. Damit ist $g_2(y)$ "bekannt" (nicht eindeutig!), und Gl. (4) vereinfacht sich zu einer Gleichung für $g_1(x)$, die Sie ebenfalls lösen können (noch einmal ist die Lösung nicht eindeutig). Somit haben sie eine Lösung für $g(x, y)$ gefunden: g heißt *integrierender Faktor*.