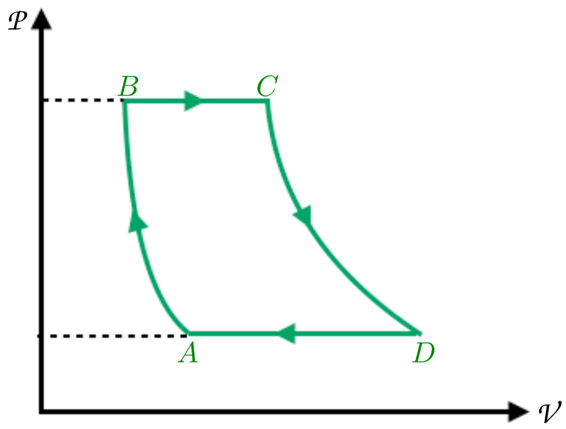
Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Joule-Kreisprozess (35 P.)

Der Joule-Kreisprozess, dessen Verlauf im $\mathcal{P}$-$\mathcal{V}$-Diagramm in der Abbildung gezeigt wird, besteht aus vier sukzessiven Transformationen eines Gases: die Schritte $A \to B$ und $C \to D$ sind adiabatisch, die Prozesse $B \to C$ und $D \to A$ isobar.



i. Vorbereitung

a) Was besagen der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik? (Physikalische Erklärungen, Gleichungen). (8 P.)

b) Wie wird der adiabatische Index γ definiert? Wie hängen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{V}$ bei der adiabatischen Transformation eines Gases zusammen? (2 P.)

c) Geben Sie die thermische Zustandsgleichung eines klassischen idealen Gases an. (1 P.)

ii. Unter der Annahme, dass sich das System wie ein klassisches ideales Gas verhält, geben Sie *ohne Berechnung* an, bei welchen Schritten das System Arbeit leistet bzw. empfängt; und bei welchen Schritten, Wärme dem System zugeführt bzw. entzogen wird. Begründen Sie Ihre Antworten. Wie wird dann der Wirkungsgrad des Joule-Kreisprozesses definiert? (10 P.)

iii. Um jetzt Berechnungen durchführen zu können, wird angenommen, dass das System ein klassisches ideales Gas mit konstanter isochorer Wärmekapazität $C_{\mathcal{V}}$ ist.

a) Geben Sie den Ausdruck der inneren Energie $U(T)$ eines solchen idealen Gases an. (1 P.)

b) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad eines idealen (reversiblen) Joule-Motors

$$\eta = 1 - \left(\frac{\mathcal{P}_A}{\mathcal{P}_B}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{1}$$

ist. Dabei können Sie (ohne Herleitung) die Relation $\mathcal{P}\mathcal{V} = (\gamma - 1)U$ benutzen. (11 P.)

c) Drücken Sie noch η durch die Temperaturen T_A und T_B aus. (2 P.)

2. Van der Waals Gas (10 P.)

Geben Sie die thermische Zustandsgleichung für das van der Waals-Gas an und erläutern Sie die dabei auftretenden Terme. Skizzieren Sie ein paar Isothermen — unten, bei, und oberhalb der kritischen Temperatur — im $\mathcal{P}$-$\mathcal{V}$-Diagramm.

3. Ideales ultra-relativistisches Gas **(20 P.)**

In dieser Aufgabe wird ein sog. ideales ultra-relativistisches Gas bei verschwindendem chemischem Potential $\mu = 0$ betrachtet. Im thermodynamischen Gleichgewicht lauten die innere Energie und der Druck eines solchen Systems $U = \mathcal{V}\,\varepsilon(T)$ und $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\varepsilon(T)$, wobei $\varepsilon(T)$ die innere Energiedichte ist.
Die Teilaufgaben **ii.** und **iii.** sind größtenteils unabhängig von der Teilaufgabe **i.**

i. Zeigen Sie, dass die Adiabaten in Variablen $(T, \mathcal{V})$ durch die Gleichung

$$\varepsilon(T)\mathcal{V}^{4/3} = \text{konst.} \tag{2}$$

gegeben sind. Dabei spielt die genaue Form von $\varepsilon(T)$ keine Rolle. (5 P.)

ii. Bestimmen Sie ausgehend von der Beziehung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{V}}\right)_T = T\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_{\mathcal{V}} - \mathcal{P}$$

die Abhängigkeit der Energiedichte $\varepsilon(T)$ von der Temperatur T. Dabei tritt eine unbestimmte multiplikative Konstante auf. (3 P.)

iii. a) Wie ist die freie Energie F definiert? Geben Sie ihr totales Differential an (Sie dürfen $\mu = 0$ annehmen). Zeigen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{V}}\right)_T = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_{\mathcal{V}}. \tag{3}$$

(5 P.)

b) Leiten Sie anhand der Kettenregel eine Beziehung zwischen $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{V}}$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mathcal{V}}$ her. (1 P.)

c) Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben **ii.**, **iii.a)** und **iii.b)** die Entropie $S(T, \mathcal{V})$ des idealen ultra-relativistischen Gases bei $\mu = 0$. (5 P.)

d) Prüfen Sie, dass die gefundenen Ausdrücke für $\varepsilon(T)$ und $S(T, \mathcal{V})$ zur Adiabatengleichung (2) führen. (1 P.)

4. Gleichverteilungssatz **(15 P.)**

i. Wie lautet die kanonische Zustandssumme der klassischen statistischen Mechanik? Benennen Sie die auftretenden Symbole. (4 P.)

ii. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen statistischen Mechanik? (4 P.)

iii. Wie lautet die innere Energie des klassischen monoatomaren idealen Gases aus N Punktteilchen in drei Raumdimensionen? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 P.)

iv. Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N unabhängigen klassischen dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren? Die Kreisfrequenzen für die Schwingungen in die drei Raumdimensionen seien ω_x, ω_y und ω_z. Begründen Sie das Ergebnis. (4 P.)

5. Zweiniveausystem **(15 P.)**

Ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem magnetischen Feld sei beschrieben durch den Hamilton-Operator $\hat{\mathsf{H}} = -mB\hat{\sigma}_z$ mit

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i. Geben Sie die kanonische Zustandssumme $Z_1(\beta)$ für ein einziges Teilchen an. (2 P.)

ii. In dieser Teilaufgabe wird ein System aus N unabhängigen identischen und unterscheidbaren Teilchen betrachtet.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_N(\beta)$. (2 P.)

b) Berechnen Sie die innere Energie U als Funktion von β. Gegen welche Werte geht U für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$? (4 P.)

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C. Gegen welche Werte geht C für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$? (5 P.)

iii. Jetzt ist die genaue Anzahl von Teilchen im System nicht bekannt. Geben Sie die zugehörige großkanonische Zustandssumme an. (2 P.)

6. Eindimensionales Ising-Modell **(15 P.)**

Sei ein System aus N (eindimensionalen) Spins mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{\mathsf{H}}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} J\,\hat{\mathsf{S}}_i\hat{\mathsf{S}}_{i+1} \tag{4}$$

mit einer Konstante $J > 0$, wobei jeder Spin nur die zwei diskreten Werte $S = \pm 1$ annehmen kann. In diesem Modell können nur benachbarte Spins miteinander wechselwirken.

i. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_N. (7 P.)

Hinweis: Zeigen Sie die Rekursionsrelation $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(\beta J)$.

ii. a) Berechnen Sie die freie Energie F. (2 P.)

b) Die freie Energie pro Teilchen sei durch $\tilde{F} \equiv F/N$ im Limes $N \gg 1$ definiert. Geben Sie $\tilde{F}$ sowie die erste Ableitung $\partial\tilde{F}/\partial T$ an. (3 P.)

c) Kann ein Phasenübergang erster Ordnung in diesem System auftreten? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 P.)

7. Quantengase **(15 P.)**

i. Was ist die Zustandsdichte eines physikalischen Systems? (1 P.)

ii. Geben Sie die Formeln für die Fermi–Dirac- sowie die Bose–Einstein-Verteilung an. Was beschreiben diese Formeln? (6 P.)

iii. Die Zustandsdichte eines zweidimensionalen Systems aus $N \gg 1$ Fermionen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ und der Masse m lautet

$$\mathscr{D}(\varepsilon) = L^2 \frac{m}{\pi\hbar^2}\Theta(\varepsilon),$$

wobei Θ die Heaviside-Funktionen ist, und L^2 die Abmessung des Systems.

Das System befindet sich bei Temperatur Null. Wie ist die Fermi-Energie ε_{F} definiert? Berechnen Sie ε_{F} als Funktion der Dichte N/L^2. (8 P.)

Es können 125 Punkte erreicht werden.
Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$