XI.1 Identische Teilchen in der Quantenmechanik

Sei ein System aus N identischen Teilchen, d.h. aus Teilchen, die durch keine Messung voneinander unterschieden werden können. Zur Behandlung dieses Systems soll neben den allgemeinen Grundpostulaten der Quantenmechanik ein zusätzliches Postulat eingeführt werden.

XI.1.1 Symmetrisierungspostulat

Die N Teilchen seien durch $1, \ldots, N$ gekennzeichnet. Der *Transpositionsoperator* $\hat{\tau}_{ij}$ wird als der Operator definiert, der die Zustände der Teilchen i und j austauscht:

$$\hat{\tau}_{ij}\Psi(1,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,N) = \Psi(1,\ldots,j,\ldots,i,\ldots,N), \tag{XI.1}$$

wobei Ψ die Wellenfunktion des Systems ist.

Den Grundpostulaten der nicht-relativistischen Quantenmechanik wird das *Symmetrisierungspostulat* hinzugefügt [43, 44]:

> *Die einzigen erlaubten Zustandsvektoren für ein System aus N ununterscheidbaren Teilchen sind entweder total symmetrisch oder total antisymmetrisch unter der Permutation unterschiedlicher Teilchen. Im ersteren bzw. letzteren Fall werden die Teilchen Bosonen bzw. Fermionen genannt.* (XI.2)

Wenn $|\Psi\rangle$ einen zulässigen N-Teilchen-Zustand bezeichnet, gilt für beliebige $i, j \in \{1,\ldots,N\}$

$$\hat{\tau}_{ij}|\Psi\rangle = \epsilon|\Psi\rangle, \tag{XI.3}$$

mit $\epsilon = +1$ bzw. -1 für Bosonen bzw. Fermionen.

Bemerkung: Dem Spin-Statistik-Theorem [45] nach sind die sich in drei Raumdimensionen bewegenden Teilchen mit einem ganzzahligen bzw. halbzahligen Spin Bosonen bzw. Fermionen.(39)

In weniger als drei Raumdimensionen wurde dazu noch die Möglichkeit von *Anyonen* theoretisch vorgeschlagen [47, 48], bei denen der Faktor ϵ in Gl. (XI.3) durch einen Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit einem beliebigen Winkel θ ersetzt wird — dann ist $\theta = 0$ bzw. π für Bosonen bzw. Fermionen. Die experimentelle Realisierung solcher Anyonen (in zwei Raumdimensionen) wurde in 2020 durch zwei Gruppen angekundigt [49, 50].

Kompatibilität des Symmetrisierungspostulats mit der Schrödinger-Gleichung

Damit die Teilchen i und j ununterscheidbar bleiben, muss jeder beliebige Transpositionsoperator $\hat{\tau}_{ij}$ mit dem Hamilton-Operator $\hat{\mathsf{H}}_N$ kommutieren: $[\hat{\tau}_{ij}, \hat{\mathsf{H}}_N] = 0$. Es sei dann zur Zeit t ein (anti)symmetrischer Zustandsvektor $|\Psi(t)\rangle$. Gemäß der Schrödinger-Gleichung lautet der Zustandsvektor zur Zeit $t + \mathrm{d}t$

$$|\Psi(t+\mathrm{d}t)\rangle = \left(1 - \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}t}{\hbar}\,\hat{\mathsf{H}}_N\right)|\Psi(t)\rangle,$$

so dass

$$\hat{\tau}_{ij}|\Psi(t+\mathrm{d}t)\rangle = \left(1 - \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}t}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}_N\right)\hat{\tau}_{ij}|\Psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}t}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}_N\right)\epsilon|\Psi(t)\rangle = \epsilon|\Psi(t+\mathrm{d}t)\rangle,$$

wobei die Kommutationseigenschaft $\hat{\tau}_{ij}\hat{\mathsf{H}}_N = \hat{\mathsf{H}}_N\hat{\tau}_{ij}$ in der ersten Gleichung benutzt wurde. Laut dieses Ergebnisses ist der Zustandsvektor zur Zeit $t+\mathrm{d}t$ ebenfalls symmetrisch oder antisymmetrisch unter dem Austausch der Teilchen i und j.

(39) Laut Feynman [46]: "It appears to be one of the few places in physics where there is a rule which can be stated very simply, but for which no one has found a simple and easy explanation. (...) This probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental principle involved."

XI.1.2 Konstruktion von physikalischen Zuständen

Das System aus N wechselwirkungsfreien ununterscheidbaren Teilchen sei beschrieben durch einen Hamilton-Operator

$$\hat{\mathsf{H}}_N = \hat{\mathsf{h}}(1) + \hat{\mathsf{h}}(2) + \cdots + \hat{\mathsf{h}}(N), \tag{XI.4}$$

wobei $\hat{\mathsf{h}}$ ein Ein-Teilchen-Hamilton-Operator auf einem Hilbert-Raum $\mathscr{H}_1$ ist. $\hat{\mathsf{h}}$ enthält einen kinetischen Anteil, sowie möglicherweise eine potentielle Energie.

Sei $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \ldots\}$ eine orthonormierte Basis von $\mathscr{H}_1$. Mit deren Hilfe wird der Hilbert-Raum $\mathscr{H}_N$ der N-Teilchen-Zustände aufgespannt durch die Zustände

$$|1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2; \ldots; N\!:\!\alpha_N\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_N\rangle$$

Wenn die N Teilchen identisch sind, bilden deren erlaubte physikalische Zustandsvektoren einen Unterraum von $\mathscr{H}_N$.

XI.1.2 a Zwei-Teilchen-Zustände

Bei einem System aus zwei ununterscheidbaren Bosonen, die jeweils mit 1 bzw. 2 gekennzeichnet werden, sind die erlaubten Zustände der Form

$$|\Psi\rangle = |1\!:\!\alpha; 2\!:\!\alpha\rangle \tag{XI.5a}$$

wenn die zwei Bosonen in demselben Zustand $|\alpha\rangle$ sind. Falls sie sich in unterschiedlichen Zuständen befinden, ist der Zwei-Teilchen-Zustand der Form

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\alpha; 2\!:\!\beta\rangle + |1\!:\!\beta; 2\!:\!\alpha\rangle\big), \quad |\alpha\rangle \neq |\beta\rangle. \tag{XI.5b}$$

Für ein System aus zwei Fermionen ist die einzige Möglichkeit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\alpha; 2\!:\!\beta\rangle - |1\!:\!\beta; 2\!:\!\alpha\rangle\big), \tag{XI.6}$$

mit unterschiedlichen Ein-Teilchen-Zuständen $|\alpha\rangle \neq |\beta\rangle$. Dies stellt ein Beispiel von Anwendung des *Pauli*[(bg)]*-Prinzips* dar: zwei identische Fermionen dürfen nicht in demselben Zustand sein.

Für zwei nicht-relativistische Teilchen mit Spin, z.B. mit dem Spin $\frac{1}{2}$, entkoppeln die Orts- und Spinfreiheitsgrade voneinander, so sich dass die Ein-Teilchen-Zustände als $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{\text{Ort}} \otimes |\chi\rangle_{\text{Spin}}$ faktorisieren lassen. Wenn die zwei Teilchen identisch sind, kann ein erlaubter Zwei-Teilchen-Zustand geschrieben werden als

- entweder das Produkt einer symmetrischen Ortsfunktion und einer antisymmetrischen Spinfunktion;

- oder das Produkt einer antisymmetrischen Ortsfunktion und einer symmetrischen Spinfunktion.

Es seien dann $|\psi_a\rangle$ und $|\psi_b\rangle$ die Ein-Teilchen-Ortsfunktionen der beiden Teilchen.

- Falls $|\psi_a\rangle = |\psi_b\rangle$ ist der Ortsteil des Zwei-Teilchen-Zustands symmetrisch, und der Gesamtzustand lautet
$$|\Psi\rangle = |1\!:\!\psi_a; 2\!:\!\psi_a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\uparrow; 2\!:\!\downarrow\rangle - |1\!:\!\downarrow; 2\!:\!\uparrow\rangle\big). \tag{XI.7}$$

- Falls $|\psi\rangle_a \neq |\psi\rangle_b$ ist der Zwei-Teilchen-Zustand entweder der Singulett-Zustand
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\psi_a; 2\!:\!\psi_b\rangle + |1\!:\!\psi_b; 2\!:\!\psi_a\rangle\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\uparrow; 2\!:\!\downarrow\rangle - |1\!:\!\downarrow; 2\!:\!\uparrow\rangle\big) \tag{XI.8a}$$
oder der Triplett-Zustand
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\psi_a; 2\!:\!\psi_b\rangle - |1\!:\!\psi_b; 2\!:\!\psi_a\rangle\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\!:\!\uparrow; 2\!:\!\downarrow\rangle + |1\!:\!\downarrow; 2\!:\!\uparrow\rangle\big), \tag{XI.8b}$$
entsprechend jeweils den zwei oben erwähnten Möglichkeiten.

[(bg)] W. Pauli, 1900–1958

XI.1.2 b N-Teilchen-Zustände

Symmetrische Gruppe

Definitionsgemäß ist die *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_N$ die Gruppe der Permutationen von N Objekten, mit den folgenden Eigenschaften:

- $\mathfrak{S}_N$ ist eine Gruppe mit $N!$ Elementen.
- Jede Permutation π kann dargestellt werden als Produkt von Transpositionen τ_{ij}, die dem Austausch von zwei Objekten beschreiben: $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(k) = k$ wenn $k \notin \{i, j\}$. Obwohl diese Faktorisierung nicht eindeutig ist, ist aber die Parität der Anzahl der Transpositionen eindeutig.
- Jeder Permutation π kann eine Zahl $\epsilon_\pi \in \{-1, +1\}$ zugeordnet werden, deren *Parität* (auch *Signatur* oder *Signum* genannt), mit $\epsilon_{\pi\pi'} = \epsilon_\pi\epsilon_{\pi'}$ für das Produkt aus zwei Permutationen. Dann ist die Parität der Identität bzw. einer beliebigen Transposition $\epsilon_{\mathbb{1}} = 1$ bzw. $\epsilon_\tau = -1$.

Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_N$ besitzt eine lineare Darstellung auf dem Hilbert-Raum $\mathscr{H}_N$ der N-Teilchen-Zustände, die der Permutation π den unitären Operator $\hat{\pi}$ mit

$$\hat{\pi}|1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2; \ldots; N\!:\!\alpha_N\rangle = |1\!:\!\alpha_{\pi(1)}; 2\!:\!\alpha_{\pi(2)}; \ldots; N\!:\!\alpha_{\pi(N)}\rangle \tag{XI.9}$$

assoziiert. Man prüft einfach nach, dass $\widehat{\pi_2\pi_1} = \hat{\pi}_2\hat{\pi}_1$ für das Produkt beliebiger Permutationen π_1, $\pi_2 \in \mathfrak{S}_N$.

Bemerkung: Wenn Ψ eine N-Teilchen-Wellenfunktion bezeichnet, z.B. in der Darstellung, die mit den Ein-Teilchen-Zuständen $\{|\alpha_i\rangle\}$ assoziiert wird, gilt

$$\hat{\pi}\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = \Psi(\alpha_{\pi^{-1}(1)}, \alpha_{\pi^{-1}(2)}, \ldots, \alpha_{\pi^{-1}(N)}). \tag{XI.10}$$

Dann stellt Gl. (XI.1) einen besonderen Fall der Gl. (XI.10) mit $\pi = \tau_{ij} = \tau_{ij}^{-1}$ dar.

Gleichung (XI.10) folgt aus

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) &= \langle 1\!:\!\alpha_1; \ldots; N\!:\!\alpha_N|\hat{\pi}|\Psi\rangle \\
&= \langle 1\!:\!\alpha_1; \ldots; N\!:\!\alpha_N|\hat{\pi}| \sum_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_N} |1\!:\!\alpha'_1; \ldots; N\!:\!\alpha'_N\rangle\langle 1\!:\!\alpha'_1; \ldots; N\!:\!\alpha'_N|\Psi\rangle \\
&= \sum_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_N} \langle 1\!:\!\alpha_1; \ldots; N\!:\!\alpha_N|1\!:\!\alpha'_{\pi(1)}; \ldots; N\!:\!\alpha'_{\pi(N)}\rangle\, \Psi(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_N) \\
&= \sum_{\alpha''_1,\ldots,\alpha''_N} \langle 1\!:\!\alpha_1; \ldots; N\!:\!\alpha_N|1\!:\!\alpha''_1; \ldots; N\!:\!\alpha''_N\rangle\, \Psi(\alpha''_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \alpha''_{\pi^{-1}(N)}).
\end{aligned}$$

Dabei wurde Gl. (XI.9) in der dritten Zeile benutzt, und die Umbenennung $\alpha'_{\pi(i)} \to \alpha''_i$ in der vierten Zeile.

Symmetrisierungs- und Antisymmetrisierungsoperator

Diese Operatoren auf dem Hilbert-Raum $\mathscr{H}_N$ werden jeweils durch

$$\hat{\mathsf{S}}_N = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_N} \hat{\pi} \tag{XI.11a}$$

und

$$\hat{\mathsf{A}}_N = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_N} \epsilon_\pi\hat{\pi} \tag{XI.11b}$$

definiert. Sie genügen den einfach nachzuprüfenden folgenden Eigenschaften:

- $\hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\mathsf{A}}_N$ sind hermitesch;
- für eine beliebige Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_N$ gelten $\hat{\pi}\hat{\mathsf{S}}_N = \hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\pi}\hat{\mathsf{A}}_N = \epsilon_\pi\hat{\mathsf{A}}_N$;

- $\hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\mathsf{A}}_N$ sind Projektoren: $\hat{\mathsf{S}}_N^2 = \hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\mathsf{A}}_N^2 = \hat{\mathsf{A}}_N$;
- $\hat{\mathsf{S}}_N\hat{\mathsf{A}}_N = \hat{\mathsf{A}}_N\hat{\mathsf{S}}_N = 0$.

Es seien dann $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{B})} = \mathrm{im}\big(\hat{\mathsf{S}}_N\big)$ und $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{F})} = \mathrm{im}\big(\hat{\mathsf{A}}_N\big)$ die jeweiligen Bilder von $\hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\mathsf{A}}_N$.

Bemerkungen:

∗ Im Fall $N = 2$ lauten die Definitionen (XI.11) $\hat{\mathsf{S}}_2 = \frac{1}{2}\big(\hat{\mathbb{1}} + \hat{\tau}_{12}\big)$ und $\hat{\mathsf{A}}_2 = \frac{1}{2}\big(\hat{\mathbb{1}} - \hat{\tau}_{12}\big)$, wobei $\hat{\mathbb{1}}$ der Identitätsoperator auf $\mathscr{H}_1$ ist.

∗ $\hat{\mathsf{S}}_N$ und $\hat{\mathsf{A}}_N$ sind für $N > 2$ nicht orthogonal.

Total symmetrische und total antisymmetrische Zustandsvektoren

Mithilfe des Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsoperators lassen sich die erlaubten Zustände eines Systems mit N identischen Bosonen bzw. Fermionen sofort schreiben.

Sei $|\Psi\rangle = |1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2; \ldots; N\!:\!\alpha_N\rangle \in \mathscr{H}_N$. Dank den Eigenschaften des Operators $\hat{\mathsf{S}}_N$ bzw. $\hat{\mathsf{A}}_N$ ist der Vektor $\hat{\mathsf{S}}_N|\Psi\rangle \in \mathscr{H}_N^{(\mathrm{B})}$ bzw. $\hat{\mathsf{A}}_N|\Psi\rangle \in \mathscr{H}_N^{(\mathrm{F})}$ total symmetrisch bzw. antisymmetrisch unter dem Austausch zweier beliebiger Teilchen, und genügt deshalb dem Symmetrisierungspostulat.

Umgekehrt ist jeder N-Bosonen-Zustand bzw. N-Fermionen-Zustand, der die Bedingung (XI.3) mit $\epsilon = +1$ bzw. $\epsilon = -1$ erfüllt, ein Vektor des Unterraums $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{B})}$ bzw. $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{F})}$. Es gilt also

$$\mathscr{H}_N^{(\mathrm{B})} = \Big\{|\Psi\rangle \in \mathscr{H}_N \;\Big|\; \hat{\pi}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \;\forall\pi \in \mathfrak{S}_N\Big\}, \tag{XI.12a}$$

$$\mathscr{H}_N^{(\mathrm{F})} = \Big\{|\Psi\rangle \in \mathscr{H}_N \;\Big|\; \hat{\pi}|\Psi\rangle = \epsilon_\pi|\Psi\rangle \;\forall\pi \in \mathfrak{S}_N\Big\}, \tag{XI.12b}$$

d.h. $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{B})}$ bzw. $\mathscr{H}_N^{(\mathrm{F})}$ ist genau der Hilbert-Raum der physikalischen Zustände für N ununterscheidbare Bosonen bzw. Fermionen.

Wenn der Zustand $|\Psi\rangle$ auf 1 normiert ist, denn ist das nicht der Fall der Vektoren $\hat{S}_N|\Psi\rangle$ und $\hat{A}_N|\Psi\rangle$. Normierte Zustände lassen sich dann aus kombinatorischen Betrachtungen erhalten. Für Fermionen gilt dank der Hermitizität des Projektors $\hat{A}_N$

$$\langle\Psi|\hat{A}_N^\dagger\hat{A}_N|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{A}_N|\Psi\rangle = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_N}\epsilon_\pi\langle\Psi|\hat{\pi}|\Psi\rangle = \frac{1}{N!},$$

weil alle $|\alpha_i\rangle$ unterschiedlich sind (sonst wäre $\hat{A}_N|\Psi\rangle$ null), so dass nur die Identität zur Summe beiträgt. Deshalb wird ein normierter N-Fermionen-Zustand durch

$$\sqrt{N!}\,\hat{A}_N|1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2; \ldots; N\!:\!\alpha_N\rangle \tag{XI.13}$$

gegeben, wobei die Ein-Teilchen-Zustände $|\alpha_i\rangle$ unterschiedlich voneinander sind.

Bei einem System aus identischen Bosonen ist es möglich, dass sich n_{α_1} davon im Zustand $|\alpha_1\rangle$ befinden, n_{α_2} im Zustand $|\alpha_2\rangle$, usw., mit $n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + \cdots = N$. Dann gilt unter Nutzung der Hermitizität des Symmetrisierungsoperators $\hat{\mathsf{S}}_N$

$$\langle\Psi|\hat{\mathsf{S}}_N^\dagger\hat{\mathsf{S}}_N|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{\mathsf{S}}_N|\Psi\rangle = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_N}\langle\Psi|\hat{\pi}|\Psi\rangle.$$

Zur Summe tragen nur die Permutationen bei, die die unterschiedlichen Untermengen von Bosonen in einem gegebenen Zustand $|\alpha_i\rangle$ invariant lassen. Dann findet man $\langle\Psi|\hat{\mathsf{S}}_N^\dagger\hat{\mathsf{S}}_N|\Psi\rangle = n_{\alpha_1}!\,n_{\alpha_2}!\ldots$, so dass ein normierter N-Bosonen-Zustand durch

$$\sqrt{\frac{N!}{n_{\alpha_1}!\,n_{\alpha_2}!\ldots}}\,\hat{\mathsf{S}}_N|1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_1; \ldots; n_{\alpha_1}\!:\!\alpha_1; n_{\alpha_1}\!+\!1\!:\!\alpha_2; \ldots; n_{\alpha_1}\!+\!n_{\alpha_2}\!:\!\alpha_2; \ldots\rangle, \tag{XI.14}$$

gegeben wird, wobei die N Teilchen nach dem jeweiligen Ein-Teilchen-Zustand geordnet wurden.

Bemerkungen:

∗ Der N-Fermionen-Zustand (XI.13) wird oft als eine (normierte) sog. *Slater*[(bh)]*-Determinante* [51] umgeschrieben, und zwar als die Determinante der Matrix, deren (i,j)-Element durch $\mathsf{M}_{ij} \equiv |i : \alpha_j\rangle$ gegeben ist:

$$\sqrt{N!}\,\hat{A}_N|1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2; \dots; N\!:\!\alpha_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} 1\!:\!\alpha_1 & 2\!:\!\alpha_1 & \dots & N\!:\!\alpha_1 \\ 1\!:\!\alpha_2 & 2\!:\!\alpha_2 & \dots & N\!:\!\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1\!:\!\alpha_N & 2\!:\!\alpha_N & \dots & N\!:\!\alpha_N \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \mathsf{M}_{ij}. \tag{XI.15}$$

Auf dieser Schreibweise sieht man sofort, dass zwei unterschiedliche Fermionen nicht in demselben Zustand $|\alpha_i\rangle$ sein können (Pauli-Prinzip): sonst wären zwei Zeilen identisch und die Determinante verschwände.

∗ In Gl. (XI.14) wurde die Reihenfolge der Teilchen vertauscht, damit sie nach dem Ein-Teilchen-Zustand $|\alpha_i\rangle$ zugeordnet werden. Dies ist für Bosonen möglich, für Fermionen aber nicht.

XI.1.2 c Darstellung der N-Teilchen-Zustände mithilfe der Besetzungszahl

Die Energieeigenzustände des Ein-Teilchen-Hamilton-Operators $\hat{\mathsf{h}}$, die eine Basis des Hilbert-Raums $\mathscr{H}_1$ bilden, seien nach der zugehörigen Energie $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_k \leq \dots$ geordnet, wobei jede Eigenenergie ε_a einem einzigen Eigenzustand (bis auf einer Phase) entspricht. Dabei kennzeichnet der Index a somit alle Quantenzahlen, und nicht nur das Energieniveau.

Eine günstige Schreibweise für einen Zustand $|\Psi\rangle$ aus N identischen Bosonen oder Fermionen, beschrieben durch den Hamilton-Operator (XI.4), beruht auf den Anzahlen der Teilchen, die sich in den jeweiligen Ein-Teilchen-Eigenzuständen befinden. Somit wird jedem Eigenzustand eine ganze Zahl n_a, die *Besetzungszahl*, mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

- $\displaystyle\sum_a n_a = N$ (alle Teilchen befinden sich in irgendeinem Zustand);
- $n_a = 0$ oder 1 für Fermionen (Pauli-Prinzip);
- für Bosonen kann n_a kann eine beliebige ganze Zahl (einschließlich 0) sein.

Mit Hilfe dieser Besetzungszahlen kann der N-Teilchen-Zustand als

$$|\Psi\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_a, \dots\rangle \tag{XI.16}$$

bezeichnet werden. Man prüft einfach nach, dass dieser Zustand ein Eigenzustand des N-Teilchen-Hamilton-Operators $\hat{\mathsf{H}}_N$ mit der Energie

$$E(\{n_1, n_2, \dots, n_a, \dots\}) = \sum_a n_a \varepsilon_a \tag{XI.17}$$

ist.

XI.1.3 Folgerungen des Symmetrisierungspostulats

XI.1.3 a Stoß zweier identischer Teilchen

Bei einer elastischen Streuung haben zwei Teilchen 1 und 2 die jeweiligen Impulse im Schwerpunktssystem $\vec{p}_\mathrm{i}$ und $-\vec{p}_\mathrm{i}$ vor dem Stoß. Es seien $\vec{p}_\mathrm{f}$ und $-\vec{p}_\mathrm{f}$ die Impulse nach dem Stoß. Diesem Prozess tragen zwei Wahrscheinlichkeitsamplituden bei: $\mathcal{A}(\vec{p}_\mathrm{i} \to \vec{p}_\mathrm{f}, -\vec{p}_\mathrm{i} \to -\vec{p}_\mathrm{f})$, entsprechend der Detektion des Teilchens 1 bzw. 2 mit dem Impuls $\vec{p}_\mathrm{f}$ bzw. $-\vec{p}_\mathrm{f}$; und $\mathcal{A}(\vec{p}_\mathrm{i} \to -\vec{p}_\mathrm{f}, -\vec{p}_\mathrm{i} \to \vec{p}_\mathrm{f})$ (Detektion von Teilchen 1 bzw. 2 mit $-\vec{p}_\mathrm{f}$ bzw. $\vec{p}_\mathrm{f}$).

(bh) J. C. Slater, 1900–1976

Wenn die zwei Teilchen unterscheidbar sind, wird die Wahrscheinlichkeit, dass im Endzustand ein Teilchen den Impuls $\vec{p}_\mathrm{f}$ und das andere den Impuls $-\vec{p}_\mathrm{f}$ hat, durch die Summe der Betragsquadrate der beiden obigen Amplituden gegeben, da die zwei möglichen Endzustände orthogonal zueinander sind. Wenn die Teilchen *identisch* sind, hat die Unterscheidung in zwei Endzuständen keine sinnvolle Bedeutung, weil es sich um denselben Endzustand handelt. Dann lässt sich fragen, was in diesem Fall mit der Amplitude zu tun sei.

Mithilfe des Symmetrisierungspostulats lässt sich das Problem des elastischen Stoßes zweier identischer Teilchen beantworten. Für eine korrekte Beschreibung des Systems müssen der Anfangs- und der Endzustand (anti)symmetrisiert werden:

$$|\Psi_\mathrm{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{\mathbb{1}} + \epsilon\hat{\tau}_{12}\big)|1\!:\!\vec{p}_\mathrm{i};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{i}\rangle,\quad |\Psi_\mathrm{f}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{\mathbb{1}} + \epsilon\hat{\tau}_{12}\big)|1\!:\!\vec{p}_\mathrm{f};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{f}\rangle,$$

mit $\epsilon = +1$ bzw. -1 für Bosonen bzw. Fermionen.

Sei $\hat{\mathsf{U}}$ der Entwicklungsoperator zwischen dem Anfangszeitpunkt — lange vor dem Stoß — und dem Endzeitpunkt — als die Teilchen detektiert werden. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang vom Anfangs- in den Endzustand wird gegeben durch

$$\mathcal{A}(|\Psi_\mathrm{i}\rangle \to |\Psi_\mathrm{f}\rangle) = \langle\Psi_\mathrm{f}|\hat{\mathsf{U}}|\Psi_\mathrm{i}\rangle = \langle 1\!:\!\vec{p}_\mathrm{f};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{f}|\frac{\hat{\mathbb{1}} + \epsilon\hat{\tau}_{12}}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathsf{U}}\,\frac{\hat{\mathbb{1}} + \epsilon\hat{\tau}_{12}}{\sqrt{2}}|1\!:\!\vec{p}_\mathrm{f};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{f}\rangle.$$

Wegen der Ununterscheidbarkeit der kollidierenden Teilchen kommutiert der Transpositionsoperator mit dem Hamilton-Operator und daher mit dem Entwicklungsoperator $\hat{\mathsf{U}}$. So kann die Amplitude als

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(|\Psi_\mathrm{i}\rangle \to |\Psi_\mathrm{f}\rangle) &= \langle 1\!:\!\vec{p}_\mathrm{f};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{f}|\big(\hat{\mathbb{1}} + \epsilon\hat{\tau}_{12}\big)\hat{\mathsf{U}}|1\!:\!\vec{p}_\mathrm{f};2\!:\!-\vec{p}_\mathrm{f}\rangle \\ &= \mathcal{A}(\vec{p}_\mathrm{i} \to \vec{p}_\mathrm{f}, -\vec{p}_\mathrm{i} \to -\vec{p}_\mathrm{f}) + \epsilon\mathcal{A}(\vec{p}_\mathrm{i} \to -\vec{p}_\mathrm{f}, -\vec{p}_\mathrm{i} \to \vec{p}_\mathrm{f})\end{aligned}$$

umgeschrieben werden. Je nachdem, ob die Teilchen Bosonen oder Fermionen sind, müssen die (Teil-)Amplituden entweder addiert oder subtrahiert werden.

Sei θ der Winkel zwischen $\vec{p}_\mathrm{i}$ und $\vec{p}_\mathrm{f}$. Wegen der Rotationssymmetrie um die Achse der Streuung hängt die Amplitude $\mathcal{A}(\vec{p}_\mathrm{i} \to \vec{p}_\mathrm{f}, -\vec{p}_\mathrm{i} \to -\vec{p}_\mathrm{f})$ nur von θ ab, und kann daher als $f(\theta)$ bezeichnet werden. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchen mit dem Winkel θ bzw. $\pi - \theta$ gestreut werden, gegeben durch [52]

$$\big|\mathcal{A}(\theta)\big|^2 = \big|f(\theta) + \epsilon f(\pi - \theta)\big|^2.$$

Für den besonderen Fall $\theta = \pi/2$ verschwindet diese Wahrscheinlichkeit für Fermionen! Dagegen ist $|\mathcal{A}(\pi/2)|^2$ für identische Bosonen zweimal größer als die entsprechende Wahrscheinlichkeit für unterscheidbare Teilchen.[40]

Bemerkung: Für eine genauere Berechnung müssen die Orientierungen der Spins der Teilchen berücksichtigt werden: die Teilchen sind nur dann ununterscheidbar, wenn die Spins dieselbe Orientierung haben.

XI.1.3 b Stimulierte Emission

Als zweites Beispiel kann man den Übergang eines Teilchens aus einem Anfangszustand $|\varphi_\mathrm{i}\rangle$ in einen Endzustand $|\varphi_\mathrm{f}\rangle$ unter dem Einfluss eines Potentials betrachten. Diesem Übergang wird eine Wahrscheinlichkeitsamplitude zugeordnet. Die Frage ist, wie sich diese Amplitude ändert, wenn sich N weitere identische Teilchen schon im Zustand $|\varphi_\mathrm{f}\rangle$ befinden, d.h. für den Prozess

$$1 \text{ Teilchen in } |\varphi_\mathrm{i}\rangle + N \text{ Teilchen in } |\varphi_\mathrm{f}\rangle \to N+1 \text{ Teilchen in } |\varphi_\mathrm{f}\rangle.$$

Sei $\mathcal{A}^{(1)}_{\varphi_\mathrm{i}\to\varphi_\mathrm{f}}$ die Amplitude in Abwesenheit von anderen Teilchen ($N = 0$) und $\mathcal{A}^{(N+1)}_{\varphi_\mathrm{i}\to\varphi_\mathrm{f}}$ die Amplitude in Anwesenheit von N zusätzlichen identischen Teilchen. Für $N \geq 1$ ist der Übergang nur dann

(40) Ein Beispiel von experimentellen Ergebnissen für die Stöße der Atomkernen der Kohlenstoff-Isotopen ^{12}C (Bosonen) und ^{13}C (Fermionen) findet sich in Ref. [53].

möglich, wenn die Teilchen Bosonen sind — bei Fermionen ist es durch das Pauli-Prinzip verboten. Man kann die Bosonen nummerieren, und die Anfangs- und Endzustand symmetrisieren:

$$|\Psi_{\rm i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\big(|1\!:\!\varphi_{\rm i}; 2\!:\!\varphi_{\rm f}; \ldots; N+1\!:\!\varphi_{\rm f}\rangle + \cdots + |1\!:\!\varphi_{\rm f}; 2\!:\!\varphi_{\rm f}; \ldots; N+1\!:\!\varphi_{\rm i}\rangle\big),$$
$$|\Psi_{\rm f}\rangle = |1\!:\!\varphi_{\rm f}; 2\!:\!\varphi_{\rm f}; \ldots; N+1\!:\!\varphi_{\rm f}\rangle.$$

Die Amplitude wird gegeben durch $\langle\Psi_{\rm f}|\hat{\mathsf{U}}|\Psi_{\rm i}\rangle$, wobei $\hat{\mathsf{U}}$ den Entwicklungsoperator für das System von $N+1$ Teilchen bezeichnet. Für nicht-wechselwirkende Teilchen ist $\hat{\mathsf{U}} = \hat{\mathsf{U}}^{(1)} \otimes \hat{\mathsf{U}}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathsf{U}}^{(N+1)}$, mit einem Ein-Teilchen-Entwicklungsoperator $\hat{\mathsf{U}}^{(k)}$, $k \in \{1, \ldots, N+1\}$. Die $N+1$ Komponenten von $|\Psi_{\rm i}\rangle$ tragen identisch zur Amplitude bei, die damit durch

$$\mathcal{A}^{(N+1)}_{\varphi_{\rm i}\to\varphi_{\rm f}} = \sqrt{N+1}\,\mathcal{A}^{(1)}_{\varphi_{\rm i}\to\varphi_{\rm f}}$$

gegeben wird, wobei $\mathcal{A}^{(1)}_{\varphi_{\rm f}\to\varphi_{\rm f}} = 1$ angenommen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $\varphi_{\rm i} \to \varphi_{\rm f}$ wird also mit dem Faktor $N+1$ multipliziert, d.h. sie wird durch die Anwesenheit N identischer Bosonen erhöht. Dieses Phänomen liegt zugrunde dem Betrieb eines Lasers, worin die Anwesenheit von N Photonen in einer Mode des elektromagnetischen Feldes die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines zusätzlichen Photons in dieselbe Mode erhöht.

Bemerkung: Für Fermionen kann man ähnlich (aber künstlich?) $\mathcal{A}^{(N+1)}_{\varphi_{\rm i}\to\varphi_{\rm f}} = (1-N)\,\mathcal{A}^{(1)}_{\varphi_{\rm i}\to\varphi_{\rm f}}$ mit $N = 0$ oder 1 schreiben.