

Übung Nr. 9

25. Zwei-atomige lineare Kette

Gegeben sei eine eindimensionale lineare Kette mit zwei Atomtypen der jeweiligen Massen m_1 und m_2 . In ihrer Ruhelage haben die Atome einen Abstand von $a/2$, wobei jedes Atom als nächste Nachbarn Atome des anderen Typs hat (Atome des selben Typs haben somit einen Abstand von a). Die Wechselwirkung zwischen den Atomen kann in guter Näherung als auf nächste Nachbarn beschränkt angesehen werden. Nehmen Sie ein lineares Kraftgesetz mit der Federkonstante λ zwischen benachbarten Atomen an.

i. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für longitudinale Gitterschwingungen auf. Wählen Sie dabei u_n^α als die Auslenkung des n -ten Atoms vom Typ $\alpha \in \{1, 2\}$ aus dessen Ruhelage R_n^α .

Hinweis: Der Koordinatenursprung sollte der Ruhelage eines der Atome entsprechen.

ii. Verwenden Sie den Lösungsansatz

$$u_n^\alpha = \frac{c_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}} e^{i(kR_n^\alpha - \omega t)}$$

für die Auslenkung des n -ten Atoms vom Typ α aus seiner Ruhelage, um die Dispersionsrelationen $\omega_\alpha(k)$ zu berechnen.

iii. Skizzieren Sie für eine qualitative Diskussion die Dispersionszweige $\omega_\alpha(k)$. Untersuchen Sie insbesondere die Spezialfälle $k = 0$, $k = \pm\pi/a$ und $0 < k \ll \pi/a$.

26. Prinzip der kleinsten Wirkung

i. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Lagrange-Dichte $\mathcal{L}[\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi]$ das Prinzip der kleinsten Wirkung die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{\nabla} \varphi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0$$

liefert, wobei die (\vec{x}, t) -Abhängigkeit des Feld φ der Kurze halber nicht geschrieben wurde. Wie sieht die entsprechende Gleichung aus für den Fall, dass man mehrere Felder φ_i hat?

ii. Wenden Sie dieses Resultat auf

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \rho\varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

an, wobei die zu variierenden Felder φ und \vec{A} sind. ρ und \vec{j} sind *fest* vorgegebene Ladungs- und Stromdichten, die nicht mitvariiert werden. Wie lauten die zu φ und A_i kanonisch konjugierten Impulse?

27. Kommutatoren

Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')]]$ und $[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')]]$ aus denen für $\hat{\varphi}(\vec{x}, t)$ und den dazu kanonisch konjugierten Impuls $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$ wenn

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}} \left(a(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} + a^*(\vec{k}) e^{i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} \right)$$

und $\hat{\pi}(\vec{x}, t) = \dot{\hat{\varphi}}(\vec{x}, t)$. Drücken Sie den Hamilton-Operator durch die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger aus.

Frohe Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch!