Übung Nr. 7

19. Streuung an einer harten Kugel

Wir betrachten die Streuung von Teilchen der Masse m am Potential einer harten Kugel

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < R_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

i. Niederenergiestreuung

Warum trägt bei sehr niedrigen Energien des Projektils $kR_0 \ll 1$ nur die s-Welle zur Streuung bei? Setzen Sie die Streulösung in der Form $\psi(\vec{x}) = r^{-1} u_{k,\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ an und geben Sie die radiale Gleichung für die Funktion $u_{k,0}(r)$ an. Finden Sie mithilfe der Randbedingung bei $r = R_0$ die Lösung dieser Gleichung und lesen Sie daran die Streuphase δ_0 ab.

Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt und vergleichen Sie ihn mit dem klassischen Ergebnis aus dem geometrischen Wirkungsquerschnitt.

ii. Hochenergiestreuung

Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für sehr hohe Energien, indem Sie über alle Partialwellen bis hin zu einem $\ell_{\max} \simeq ka$ mitteln (warum?). Wie groß ist in diesem Fall σ_{tot} im Vergleich zum geometrischen Wirkungsquerschnitt?

20. Resolvente des Hamiltonoperators

In der Vorlesung wurden Operatoren $\hat{\mathscr{G}}_{0,\pm}$ eingeführt, die mit dem freien Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ assoziiert sind. Analog kann man mithilfe des zeitunabhängigen Hamiltonoperators mit Potential $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ die Operatoren

$$\hat{\mathscr{G}}_\pm(E) \equiv \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{E - \hat{H} \pm \mathrm{i}\epsilon}, \tag{2}$$

definieren, worin ϵ reell ist. Die $\hat{\mathscr{G}}_\pm$ sind tatsächlich die Grenzwerte der *Resolvente*

$$\hat{\mathscr{G}}(z) \equiv \frac{1}{z - \hat{H}} \tag{3}$$

auf beiden Seiten des Schnitts längs der reellen Achse, worauf die Pole von $\hat{\mathscr{G}}$ liegen.

i. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathscr{G}}(z) = \hat{\mathscr{G}}_0(z) + \hat{\mathscr{G}}_0(z)\hat{V}\hat{\mathscr{G}}(z), \tag{4}$$

wobei $\hat{\mathscr{G}}_0$ die Resolvente zum freien Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ bezeichnet.

Hinweis: Für zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ gilt immer die Gleichung $\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}}(\hat{B} - \hat{A})\frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{B}}(\hat{B} - \hat{A})\frac{1}{\hat{A}}$.

ii. Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator im Schrödinger-Bild $\hat{U}(t, t_0)$ gegeben ist durch

$$\hat{U}(t, t_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E(t-t_0)/\hbar} \left[\hat{\mathscr{G}}_-(E) - \hat{\mathscr{G}}_+(E)\right], \tag{5}$$

worin der Referenzzeitpunkt t_0 beliebig ist.

21. Formale Streutheorie... vereinfacht!

Wir wollen hier einige Ideen des durch Gell-Mann und Goldberger entwickelten „formalen“ Vorgehen zur Streutheorie betrachten.

Es sei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ der Hamiltonoperator für ein Streuproblem, wobei $\hat{H}_0$ der freie Hamiltonoperator ist und V ein Potential bezeichnet.

i. Stationäre Streuzustände

Es sei $|\varphi_i\rangle$ ein Eigenzustand zum Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ mit dem Eigenwert E_i. Ein Zustand $|\psi_i^+\rangle$ sei definiert durch

$$|\psi_i^+\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{\epsilon}{\hbar}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(H-E_i-\mathrm{i}\epsilon)t'/\hbar}\,|\varphi_i\rangle\right]. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass $|\psi_i^+\rangle = [1 + \hat{\mathscr{G}}_+(E_i)\hat{V}]\,|\varphi_i\rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass $|\psi_i^+\rangle$ Lösung der Lippmann–Schwinger-Gleichung für die Streuung eines Teilchens am Potential V ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Zustände $|\psi_i^+\rangle$ orthonormiert sind.

Unter einigen Bedingungen für das Potential kann man auch zeigen, dass $|\psi_i^+\rangle$ Eigenzustand zu $\hat{H}$ mit dem Eigenwert E_i ist, also *stationärer Streuzustand*.

ii. S- und T-Matrizen

Analog definiert man mithilfe eines Eigenzustands $|\varphi_f\rangle$ von $\hat{H}_0$ und einer der Gl. (6) ähnlichen Gleichung einen Zustand $|\psi_f^-\rangle = [1 + \hat{\mathscr{G}}_-(E_f)\hat{V}]\,|\varphi_f\rangle$.
Es sei dann $S_{fi} \equiv \langle\psi_f^-|\psi_i^+\rangle$: dies ist das Matrixelement eines Übergangsoperators, der *S-Matrix*, zwischen den Zuständen $|\varphi_i\rangle$ und $|\varphi_f\rangle$. Warum ist S unitär? Zeigen Sie, dass

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\mathrm{i}\pi\delta(E_f - E_i)\langle\varphi_f|\,T(E_i)\,|\varphi_i\rangle, \tag{7}$$

worin die *T-Matrix* gegeben ist durch

$$\hat{T}(E_i) = \hat{V} + \hat{V}\hat{\mathscr{G}}_+(E_i)\hat{V}. \tag{8}$$

iii. Zeigen Sie, dass für $\hat{T}$ gilt die iterative Lösung

$$\hat{T}(E) = \hat{V} + \hat{V}\hat{\mathscr{G}}_{0,+}(E)\hat{V} + \hat{V}\hat{\mathscr{G}}_{0,+}(E)\hat{V}\hat{\mathscr{G}}_{0,+}(E)\hat{V} + \cdots \tag{9}$$

Was ergibt sich sofort aus dieser Entwicklung?

iv. Zeigen Sie, dass die Unitarität von $\hat{S}$ zur Relation

$$T - T^\dagger = -2\mathrm{i}\pi\sum_k \delta(E - E_k)TT^\dagger \tag{10}$$

und dadurch zum optischen Theorem führt.