# Übung Nr. 5

## 13. Quadratischer Zeeman Effekt

Berechnen Sie den sogenannten quadratischen Zeeman Effekt für den Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms mit der Kernladungszahl $Z$, der durch den in der Vorlesung vernachlässigten Term proportional zu $\vec{A}^2$ im Hamiltonoperator zustande kommt. Schreiben Sie die Korrektur zur Energie als $\Delta E = -\frac{1}{2}\chi\vec{B}^2$. Wie lautet $\chi$?

*Hinweis*: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^n \mathrm{e}^{-\alpha r} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

## 14. Clebsch–Gordan Koeffizienten

Benutzen Sie die Rekursionsrelation zur Bestimmung der Clebsch–Gordan Koeffizienten, um die folgende Beziehung zu zeigen:

$$\begin{aligned}|j_1=\ell, j_2=\frac{1}{2}; j=\ell\pm\frac{1}{2}, m_j\rangle \;&=\; \pm\sqrt{\frac{\ell\pm m_j+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,|j_1=\ell, j_2=\frac{1}{2}; m_j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\\ &\quad+\sqrt{\frac{\ell\mp m_j+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,|j_1=\ell, j_2=\frac{1}{2}; m_j+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.\end{aligned}$$

## 15. Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\triangle + k^2)\psi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \tag{1}$$

worin $k \in \mathbb{R}$.

### i. Greensche Funktion

Zeigen Sie mithilfe des Ausdrucks des Laplace-Operators $\triangle$ in sphärischen Polarkoordinaten, dass mit $r = |\vec{x}|$

$$G_\pm(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr}}{r} \tag{2}$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d.h.

$$(\triangle + k^2)G_\pm(\vec{x}) = \delta(\vec{x}).$$

**ii.** Benutzen Sie die Greensche Funktion $G_+(\vec{x})$, um eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (1) zu schreiben. Wie kann man die allgemeine Lösung dieser Gleichung schreiben?