Übung Nr. 4

Der Hamiltonoperator für ein spinloses Teilchen der Masse m und der Ladung q im elektromagnetischen Feld ist

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\right]^2 + q\phi(\hat{\vec{x}},t), \tag{1}$$

worin $\vec{A}$ und ϕ die Potentiale für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind, und $\hat{\vec{p}}$ den kanonischen Impulsoperator bezeichnet.

10. Geschwindigkeitsoperator eines Teilchens in einem Magnetfeld

Wir wollen hier die Eigenschaften des „Geschwindigkeitsoperators“

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}})\right], \tag{2}$$

und des Operators

$$\hat{\vec{\Lambda}} = m\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{v}} \tag{3}$$

für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q in einem zeitunabhängigen Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ bestimmen.

i. Kommutatorrelationen

Überprüfen Sie, dass der Kommutator zweier Komponenten von $\hat{\vec{v}}$ ist

$$[v_i, v_j] = \frac{\mathrm{i}\hbar q}{m^2}\,\epsilon_{ijk}B_k,$$

wobei ϵ_{ijk} das übliche total antisymmetrische Levi–Civita-Symbol ist.
Berechnen Sie dann den Kommutator $[\hat{\vec{v}}^2, \hat{\vec{v}}]$.

Zeigen Sie auch, dass

$$[x_i, v_j] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\,\delta_{ij},$$

und folgern Sie daraus den Kommutator $[\Lambda_i, \Lambda_j]$ zweier Komponenten des Operators $\hat{\vec{\Lambda}}$. Warum ist der letztere im allgemeinen Fall kein Drehimpulsoperator?

Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\vec{v}}^2, \hat{\vec{\Lambda}}]$.

ii. Zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte

Zeigen Sie mithilfe des Ehrenfest-Theorems und des Hamiltonoperators (1), dass die zeitliche Entwicklung des Erwartungswerts des Geschwindigkeitsoperators (2) gegeben ist durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\vec{v}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{\vec{F}}(\hat{\vec{x}},\hat{\vec{v}})\rangle \quad \text{mit} \quad \hat{\vec{F}}(\hat{\vec{x}},\hat{\vec{v}}) = \frac{q}{2}\left[\hat{\vec{v}} \times \vec{B}(\hat{\vec{x}},t) - \vec{B}(\hat{\vec{x}},t) \times \hat{\vec{v}}\right]. \tag{4}$$

Geben Sie dann die Gleichung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\vec{\Lambda}}\rangle$ und interpretieren Sie das Ergebnis sowie Gl. (4).

11. Eichinvarianz

Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld ihre Form behält, wenn man eine Eichtransformation der Potentiale,

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x},t) \;&\to\; \vec{A}'(\vec{x},t) \;=\; \vec{A}(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x},t) \\
\phi(\vec{x},t) \;&\to\; \phi'(\vec{x},t) \;=\; \phi(\vec{x},t) - \frac{\partial\chi}{\partial t}(\vec{x},t),
\end{aligned}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(\vec{x},t)$, und gleichzeitig eine lokale Phasentransformation der Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x},t) \;\to\; \psi'(\vec{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi(\vec{x},t)/\hbar}\,\psi(\vec{x},t).$$

durchführt.

12. Aharonov–Bohm Effekt

i. Umlaufzahl und Polarwinkelform

Wir wollen im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$\vec{A}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

betrachten.

a) Zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial A_x}{\partial y} = \dfrac{\partial A_y}{\partial x}$ und $\vec{A} = \vec{\nabla} f(x,y)$ mit $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$.

b) Man kann zeigen, dass für jede geschlossene Kurve $\mathscr{C}$

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi n,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl des Weges $\mathscr{C}$ um den Ursprung bezeichnet. Überprüfen Sie dies an Beispielen (etwa für geeignete Kreiswege).

Wegen dieses Resultats wird $\theta = \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ als *Polarwinkelform* bezeichnet.

ii. Aharonov–Bohm Effekt

Es sei eine (unendlich lange) Spule längs der z-Achse, die ein konstantes Magnetfeld erzeugt, das auf das Innere der Spule beschränkt wird. Elektronen (Ladung $-e$) aus einer Quelle bei $\vec{x}_0$ treffen auf eine Doppeltspaltanordnung, hinter der ein Schirm aufgestellt ist, wobei die Spule zwischen den beiden Spalten und parallel zum Schirm ist. Die Spule sei derart abgeschirmt, dass die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.

Zeigen Sie, dass das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(-\frac{By}{x^2+y^2}, \frac{Bx}{x^2+y^2}, 0\right)$$

mit $B \in \mathbb{R}$ das Magnetfeld obiger Versuchsanordnung außerhalb der Spule beschreibt. Zeigen Sie weiter, dass

$$\psi_{\vec{B}}(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\right)\psi_{\vec{B}=\vec{0}}(\vec{x})$$

eine Lösung der Schrödinger-Gleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_{\vec{B}=\vec{0}}$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ohne Magnetfeld ist. Zeigen Sie mithilfe der Ergebnisse von **i.**, dass sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- bzw. ausgeschaltet wird.