

Übung Nr. 3

7. Zeitabhängige Störungstheorie zweiter Ordnung

i. Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

bis zur zweiten Ordnung in V_I .

ii. Entwickeln Sie die rechte Seite von

$$|\psi(t)\rangle_I = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right] |\psi(t_0)\rangle_I$$

bis zur zweiten Ordnung in V_I und vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem aus **i**.

8. Zwei-Niveau-System: Rabi-Oszillationen

Auf einem zweidimensionalen Hilbert-Raum sei der konstante Hamiltonoperator H_0 definiert, mit den (orthogonalen) normierten Eigenzuständen $|\psi_i\rangle$ mit Energie E_i und $|\psi_f\rangle$ mit Energie E_f . Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Wechselwirkung V eingeschaltet, die danach konstant bleibt. In der Basis $(|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle)$ wird V gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 0 & V_{if} \\ V_{if} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $V_{if} \in \mathbb{R}$.

Das System sei für $t < 0$ im Zustand $|\psi_i\rangle$. Wir wollen die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(T)$ berechnen, dass es sich zum Zeitpunkt $T > 0$ im Zustand $|\psi_f\rangle$ befindet. Diese Wahrscheinlichkeit wird in **i**. exakt berechnet, dann in **ii**. näherungsweise mithilfe der Störungsrechnung 1. Ordnung. In **iii**. werden die beiden Ausdrücke miteinander verglichen.

i. Überprüfen Sie, dass die Eigenzustände des Hamiltonoperators $H = H_0 + V$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= \cos \theta |\psi_i\rangle + \sin \theta |\psi_f\rangle \\ |\varphi_2\rangle &= -\sin \theta |\psi_i\rangle + \cos \theta |\psi_f\rangle, \end{aligned}$$

mit $\tan 2\theta = \frac{2V_{if}}{E_i - E_f}$ und den Energien

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(E_i + E_f) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_i - E_f)^2 + 4V_{if}^2} \\ E_2 &= \frac{1}{2}(E_i + E_f) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_i - E_f)^2 + 4V_{if}^2}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Zeitentwicklungen von $|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$, und zeigen Sie, dass die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit ist

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(T) = \frac{4V_{if}^2}{(E_i - E_f)^2 + 4V_{if}^2} \sin^2 \left[\sqrt{(E_i - E_f)^2 + 4V_{if}^2} \frac{T}{2\hbar} \right]. \quad (1)$$

ii. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(1)}(T)$ für den Übergang $|\psi_i\rangle \rightarrow |\psi_f\rangle$ zur ersten Ordnung in V , sowie die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}^{(2)}(T)$.

iii. Zeigen Sie zunächst, dass für kurze Zeiten $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}^{(2)}(T) \sim \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(T) \ll 1$.

Nehmen Sie dann an, dass $|V_{if}| \ll |E_i - E_f|$, und schreiben Sie $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(T)$ und $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}^{(2)}(T)$ um. Stimmen die beiden Ausdrücke noch miteinander überein?

9. Quanten-Zeno-Effekt

Es sei ein Zwei-Niveau-System: $\{|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle\}$ mit $E_i > E_f$, wobei die Niveaus durch eine Wechselwirkung gekoppelt sind, die Übergänge induzieren kann. Nehmen wir an, dass das System ursprünglich ($t = 0$) im angeregten Zustand $|\psi_i\rangle$ ist. Es kann dann in den Grundzustand $|\psi_f\rangle$ zerfallen. Ohne Energiezufuhr ist der Prozess $|\psi_f\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle$ nicht möglich, was im Folgenden angenommen wird.

In der letzten Aufgabe haben Sie gefunden, dass für kurze Zeiten die Übergangswahrscheinlichkeit in einem ähnlichen System quadratisch von der Zeit abhängt:

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) \propto \kappa t^2. \quad (2)$$

Dies gilt ziemlich allgemein, und hat die unerwartete (mindestens, aus dem Aussichtspunkt der klassischen Physik) Folge, dass wiederholte Beobachtungen die zeitliche Entwicklung des Systems „verhindern“.

i. Das System wird zum Zeitpunkt $t/2$ beobachtet. Geben Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, das System zu diesem Zeitpunkt im Zustand $|\psi_f\rangle$ bzw. $|\psi_i\rangle$ zu finden. Folgern Sie, dass die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit, dass das System bei t im Zustand $|\psi_f\rangle$ sei, gegeben ist durch

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t | \text{Messung bei } t/2) \simeq 2\kappa \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t).$$

ii. Was ist die Wahrscheinlichkeit, das System zum Zeitpunkt t im Zustand $|\psi_f\rangle$ zu finden, falls es inzwischen N -mal beobachtet wurde? Was passiert im Limes $N \rightarrow \infty$?

Dieses sogenannte *Quanten-Zeno-Effekt*, bei dem Beobachtungen die Zeitentwicklung eines Systems verhindern, ist nicht nur eine theoretische Idee, sondern wurde auch experimentell bestätigt: vgl. W.M.Itano *et al.*, Phys. Rev. A **41** (1990) 2295–2300.