Übung Nr. 13

37. Komponenten in Quadraturphasenbeziehung eines Einzelmoden-Felds

In dieser Aufgabe wird angenommen, dass ein einziger Mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon})$ des elektromagnetischen Felds durch Photonen besetzt wird („Einzelmoden-Feld"). Dann lautet der Operator für das freie elektrische Feld im Heisenberg-Bild

$$\hat{\vec{E}}(\vec{x},t) = \mathrm{i}\mathscr{E}_\omega \vec{\varepsilon}\left[\hat{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right], \quad \text{mit} \quad \mathscr{E}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}.$$

i. Es seien die zwei linearen Kombinationen der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ des Modes

$$\hat{a}_P = \frac{1}{2}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \tag{1a}$$

$$\hat{a}_Q = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right). \tag{1b}$$

Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{a}_P, \hat{a}_Q\right]$ und folgern Sie daraus, dass $\Delta a_P\, \Delta a_Q \geq 1/4$, wobei Δa_P und Δa_Q die Standardabweichungen von $\hat{a}_P$ und $\hat{a}_Q$ im Mode bezeichnen.

Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator des Modes sich umschreiben läßt als

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}_P^2 + \hat{a}_Q^2\right).$$

ii. Drücken Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$ mithilfe von $\hat{a}_P$ und $\hat{a}_Q$ aus. Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{a}_P$ und $\hat{a}_Q$ zwei Komponenten des Felds beschreiben, die in Quadraturphasenbeziehung sind. Was ist die physikalische Folge des nicht-verschwindenden Werts des Kommutators $\left[\hat{a}_P, \hat{a}_Q\right]$?

iii. Zeigen Sie, dass $\hat{a}_\theta = \hat{a}_P \cos\theta + \hat{a}_Q \sin\theta$ die um θ bezüglich $\hat{a}_P$ verschobene Komponente des Felds beschreibt. Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator umschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_\theta^2 + \hat{a}_{\theta+\pi/2}^2\right).$$

iv. Jetzt wird angenommen, dass das Feld sich in einem quasiklassischen Zustand $|\alpha\rangle$ befindet. Es seien

$$\alpha_P = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*), \quad \alpha_Q = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha - \alpha^*), \quad \alpha_\theta = \alpha_P \cos\theta + \alpha_Q \sin\theta.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{a}_P\rangle$, $\langle\hat{a}_Q\rangle$, $\langle\hat{a}_\theta\rangle$ der Operatoren $\hat{a}_P$, $\hat{a}_Q$, $\hat{a}_\theta$ im Zustand $|\alpha\rangle$, sowie die Standardabweichungen Δa_P, Δa_Q, Δa_θ. Zeigen Sie, dass diese Standardabweichungen gleich groß sind und bestimmen Sie ihren Wert δ.

38. Gequetschte Zustände des freien elektromagnetischen Felds

In dieser Aufgabe werden Zustände des freien elektromagnetischen Felds eingeführt mit unterschiedlichen Standardabweichungen für zwei Komponenten in Quadraturphasenbeziehung, während das Produkt dieser Standardabweichungen den minimalen Wert hat, der mit den Unschärferelationen verträglich ist.

Es sei also der auf einen Mode des Felds wirkende Operator

$$\hat{B} = \frac{r}{2}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right),$$

mit $r \in \mathbb{R}$ und $\hat{a}$ bzw. $\hat{a}^\dagger$ dem Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator für den Mode.

i. Berechnen Sie die Kommutatoren $\big[\hat{a}, B\big]$ und $\big[\hat{a}^\dagger, B\big]$.

ii. Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{T} \equiv \mathrm{e}^{\hat{B}}$ unitär ist.

iii. Berechnen Sie mithilfe der Relation zwischen Operatoren

$$\mathrm{e}^{\hat{B}}\hat{X}\mathrm{e}^{-\hat{B}} = \hat{X} + \big[\hat{B}, \hat{X}\big] + \frac{1}{2!}\Big[\hat{B}, \big[\hat{B}, \hat{X}\big]\Big] + \cdots + \frac{1}{n!}\Big[\hat{B}, \big[\hat{B}, \ldots \big[\hat{B}, \hat{X}\big]\big]\Big] + \cdots$$

die Operatoren $\hat{T}\hat{a}\hat{T}^\dagger$ und $\hat{T}\hat{a}^\dagger\hat{T}^\dagger$.

iv. Es seien die durch die Gl. (1) der Aufgabe **38** bestimmten Operatoren $\hat{a}_P$ und $\hat{a}_Q$, die zwei Komponenten in Quadraturphasenbeziehung des Felds beschreiben. Berechnen Sie $\hat{b}_P = \hat{T}\hat{a}_P\hat{T}^\dagger$, $\hat{b}_Q = \hat{T}\hat{a}_Q\hat{T}^\dagger$, sowie $\hat{T}\hat{a}_P^2\hat{T}^\dagger$ und $\hat{T}\hat{a}_Q^2\hat{T}^\dagger$.

v. Das Feld sei jetzt im Zustand $|c\rangle = \hat{T}^\dagger\,|\alpha\rangle$, mit $|\alpha\rangle$ einem quasiklassischen Zustand des Felds. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{a}_P$ und $\hat{a}_Q$ in diesem Zustand, sowie die zugehörigen Standardabweichungen Δa_P und Δa_Q.