Übung Nr. 12

36. Semiklassische Strahlungstheorie

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die semiklassische Beschreibung eine korrekte Beschreibung einiger Prozesse (Absorption und Emission) der Wechselwirkung zwischen einem Teilchen und externer Strahlung liefert. Wir wollen den Übergang von einem Anfangszustand der Energie E_i in einen angeregten Zustand der Energie E_f diskutieren, wobei der angeregte Zustand **i.** im Kontinuum oder **ii.** im diskreten Spektrum liegen kann.

i. Endzustand im Kontinuum

Nehmen wir zunächst an, dass der Übergang durch monochromatisches Licht der Frequenz $\omega = |E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f}|/\hbar$ angeregt wird. Wir arbeiten in der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

a) Welche Bedingung muss erfüllt werden, damit der Ansatz einer ebenen Welle

$$2\vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

mit der Eichbedingung verträglich ist? Hierbei ist $\vec{A}_0$ eine komplexe Amplitude. Geben Sie auch die resultierenden Größen $\vec{A}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an (diese müssen reellwertig sein!), sowie die Intensität der Welle (Betrag des Poyntingvektors).

b) Nun betrachten wir die Polarisation der Welle: $\vec{A}_0$ habe das komplexe Quadrat

$$\vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0 = |\vec{A}_0|^2\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}.$$

Wir definieren einen neuen komplexen Vektor

$$\vec{C}_0 = \vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Warum ist $\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_0$ reellwertig? Welche Bedingung folgt hieraus für den reellen und imaginären Anteil von $\vec{C}_0 = \vec{c}_1 + \mathrm{i}\vec{c}_2$? Welche Bedingungen müssen für $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ gelten im Fall von linearer Polarisation, zirkularer Polarisation oder elliptischer Polarisation? Wählen Sie die Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems in geeigneter Weise, um die Richtungsabhängigkeit des Vektorpotentials $\vec{A}$ mit einem Polarisationsvektor $\vec{P}$ auszudrücken.

c) Geben Sie nun die Übergangsrate in einen Zustand mit $E_\mathrm{f} = E_\mathrm{i} + \hbar\omega$ mithilfe Fermis goldener Regel.

ii. Diskreter Endszustand

Nun diskutieren wir die Anregung in einen diskreten Zustand. Hier muss angenommen werden, dass der Übergang durch *nichtmonochromatisches* Licht bestehend aus viel eng zusammenliegenden Frequenzen ω_i angeregt wird. Wir machen den Ansatz

$$2\sum_i \vec{C}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega_i t+\theta_i)}.$$

a) Geben Sie in Analogie zu **i.**a) wieder die Größen $\vec{A}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an.

b) Da die ω_i sehr nah beieinander liegen, ist es gerechtfertigt, die Vektoren $\vec{C}_i$, $k_i\vec{C}_i$ und $\vec{k}_i \times \vec{C}_i$ durch die Mittelwerte $\vec{C}_0$, $k_i\vec{C}_0$ und $\vec{k} \times \vec{C}_0$ zu ersetzen. Geben Sie wiederum $\vec{A}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an, sowie den Poyntingvektor, wobei Sie die Größe

$$R(t) = \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_i - \omega_i t)}$$

verwenden dürfen. Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle R^2 \rangle$ und $\langle |R|^2 \rangle$ im Limes großer Zeitintervalle und geben Sie die Intensität, gegeben durch den zeitgemittelten Betrag des Poyntingvektors, an. Zeigen Sie, dass die frequenzabhängige Intensität durch

$$I(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi c} |\vec{C}_0|^2 n(\omega)$$

gegeben ist, wobei $n(\omega)$ die Zahl der Moden mit Frequenz ω ist.

c) Geben Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ wiederum mittels eines Polarisationsvektors $\vec{P}$ an.

d) Berechnen Sie mittels zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}$ für Absorption.

e) Als letzter Schritt soll nun über die Phasen θ_i, θ_j gemittelt werden, wodurch die Annahme der Inkohärenz der Welle realisiert wird. (Diese ist gültig, sofern die Strahlung von einer großen Zahl von Atomen emittiert wird.) Versuchen Sie, hierdurch auch die Übergangsrate zu bestimmen. Das Ergebnis lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{P}_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} \frac{2\pi e^2 \hbar}{m^2 c \omega_{\mathrm{if}}} \frac{I(\omega_{\mathrm{if}})}{\hbar \omega_{\mathrm{if}}} \left| \int \mathrm{d}\tau \, u_{\mathrm{f}}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \vec{P} \cdot \vec{\nabla} u_{\mathrm{i}} \right|^2 ,$$

wobei $\omega_{\mathrm{if}} = |E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{f}}|/\hbar$ und die Wellenfunktionen u_{i} und u_{f} den Anfangs- und Endzustand des Teilchens der Masse m und Ladung e charakterisieren.