Übung Nr. 10

28. Kohärente Zustände

i. Gegeben sei eine lineare Kette von N identischen Oszillatoren mit Masse m und harmonischer Kopplung an nächste Nachbarn, deren Gleichgewichtslage durch $x_n = na$ bestimmt wird. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $u_n(t)$ auf und verwenden Sie periodische Randbedingungen $u_{n+N}(t) = u_n(t)$ für den Lösungsansatz der $u_n(t)$. Berechnen Sie ebenfalls die Normalkoordinaten $Q_n(t)$.

ii. Die kohärenten Zustände[1] $|\alpha_k\rangle$ für die lineare Kette sind gegeben durch

$$|\alpha_k\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha_k|^2/2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger)^p}{p!} |0\rangle.$$

Zeigen Sie zunächst, dass die $|\alpha_k\rangle$ Eigenzustände zu den Vernichtungsoperatoren sind, und dass die $|\alpha_k\rangle$ auf 1 normiert sind. Berechnen Sie dann den Mittelwert des Operators

$$\hat{u}_n(t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_k}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kna-\omega_k t)} \hat{a}_k + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kna-\omega_k t)} \hat{a}_k^\dagger\right]$$

für kohärente Zustände.

29. Mehr-Teilchen-Zustände

i. Es seien die 2-Teilchen-Zustandsvektoren $|\Psi_a\rangle = |1\!:\!\alpha_1; 2\!:\!\alpha_2\rangle$ und $|\Psi_b\rangle = |3\!:\!\alpha_3; 4\!:\!\alpha_4\rangle$. Drücken Sie das Skalarprodukt der (anti-)symmetrisierten Zustände $\hat{S}_2 |\Psi_a\rangle$ und $\hat{S}_2 |\Psi_b\rangle$ bzw. $\hat{A}_2 |\Psi_a\rangle$ und $\hat{A}_2 |\Psi_b\rangle$ durch die Skalarprodukte der 1-Teilchen-Zustände aus. Wie lautet es für den Fall, dass diese Impuls-Eigenzustände sind?

ii. Verallgemeinern Sie Ihr Resultat aus **i.** für beliebige (anti-)symmetrisierte N-Teilchen-Zustände.

30. Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

Zeigen Sie, dass für die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_\alpha$ und $\hat{a}_\beta^\dagger$

$$\hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\alpha (\hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\alpha_n}^\dagger)|0\rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha,\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\alpha_{i-1}}^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_{\alpha_{i+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie den (Anti-)Kommutator der Operatoren $\hat{a}_\alpha$ und $\hat{a}_{\alpha_i}^\dagger$.

[1] Vgl. Roy J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131** (1963) 2766.