

## Übung Nr. 1

### 1. Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

mit der kleinen Störung ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\hat{W} = \frac{1}{2} \varepsilon m \omega^2 x^2.$$

Geben Sie zunächst die exakte Lösung an und entwickeln Sie die Energieeigenwerte in eine Potenzreihe in  $\varepsilon$ . Berechnen Sie dann die Energieverschiebung in Störungstheorie bis zur 2. Ordnung und vergleichen Sie mit dem ersten Ergebnis.

*Hinweis:* Beachten Sie, dass in 2. Ordnung nur zwei andere Niveaus zur Energieverschiebung des  $n$ -ten Niveaus beitragen (welche?).

### 2. Anharmonischer Oszillator

Der eindimensionale anharmonische Oszillator ist gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + W(x),$$

worin  $W(x)$  ein Polynom in  $x$  ist.

Berechnen Sie für den speziellen Fall ( $C \in \mathbb{R}$ ,  $D \in \mathbb{R}_+$ )

$$W(x) = Cx^3 + Dx^4$$

die Energieverschiebung der Niveaus des harmonischen Oszillators in Störungstheorie 1. Ordnung. Bleibt das Spektrum unter Einfluß der Störung äquidistant?

*Hinweis:* Drücken Sie die Störung mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$  aus. Beachten Sie, dass der Erwartungswert eines Produkts dieser Operatoren in einem reinen Zustand des ungestörten harmonischen Oszillators nur dann nicht verschwindet, wenn in dem Produkt gleich viele Auf- und Absteigeoperatoren auftreten. Alle relevanten Erwartungswerte lassen sich durch  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  ausdrücken.

### 3. Einfluß der endlichen Kernaushdehnung auf die atomaren Energieniveaus

Der Kern eines wasserstoffähnlichen Atoms werde als homogen geladene Kugel der Gesamtladung  $Ze$  mit Radius  $R$  aufgefaßt. Das Elektron bewegt sich dann im kugelsymmetrischen Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R \\ -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right) \right] & \text{für } r < R. \end{cases}$$

Behandeln Sie die *Abweichung* des Potentials  $V(r)$  vom Coulomb-Potential eines punktförmigen Atomkerns als Störung und berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung die Energieverschiebung des 1s-Zustands in Abhängigkeit vom Bohrschen Radius  $a_0$  und vom Kernradius  $R$ . Dabei

können Sie annehmen, dass  $R \ll a_0$ . Wie groß ist die Energieverschiebung des Grundzustands beim Wasserstoff ( $Z = 1$ ,  $R = 1,2 \cdot 10^{-15}$  m)?

*Hinweis:* Die Wellenfunktion im Ortsraum des 1s-Zustands im Coulomb-Potential ist

$$\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-Zr/a_0}$$

mit dem Bohrschen Radius  $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2) \simeq 0,5 \cdot 10^{-10}$  m. Beachten Sie, dass  $e^{-r/a_0} \simeq 1$  für  $r \leq R \ll a_0$ .