Übungsblatt Nr.9

Diskussionsthemen:
- Wie sieht die Fourier-Transformierte einer Ableitung aus?
- Wie sind die Eigenvektoren und Eigenwerte eines Operators definiert?
- Wie ist ein hermitescher bzw. selbstadjungierter linearer Operator definiert?

26. Eigenschaften der Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte einer Funktion f sei als $[\mathcal{F}f(x)](k) \equiv \tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$ definiert. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation:

i. $[\mathcal{F}f(x+y)](k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\tilde{f}(k)$ (Translation); **ii.** $[\mathcal{F}f(ax)](k) = \dfrac{1}{a}\tilde{f}\left(\dfrac{k}{a}\right)$ für $a > 0$ (Skalierung).

27. Eigenwerte des harmonischen Oszillators

Der Hamilton-Operator des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

mit den Eigenfunktionen

$$\phi_n(x) = \alpha H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\mathrm{e}^{-m\omega x^2/2\hbar},$$

wobei α ein (hiernach nicht relevanter) Normierungsfaktor ist und $H_n(x)$ die Hermite Polynome sind. Die Hermite Polynome sind dadurch definiert, dass sie die Differentialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

erfüllen. Zeigen Sie allein mit dieser Eigenschaft, dass die Eigenwerte des Hamilton-Operators bezüglich der Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ gegeben sind als

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

28. Laguerre Polynome

Die Laguerre-Differentialgleichung lautet

$$xf''(x) + (1-x)f'(x) + nf(x) = 0 \quad \text{für } x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

i. Überprüfen Sie, dass die in Aufgabe **16.** bestimmten Polynome diese Gleichung erfüllen.

ii. Zeigen Sie, durch Multiplikation mit e^{-x}, dass der Differentialoperator der Gl. (1) in die Form eines selbstadjungierten Operators gebracht werden kann, wobei das Skalarprodukt mit der Gewichtsfunktion $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ definiert ist (Aufgabe **16.**).