Übungsblatt Nr.8

Diskussionsthema: Wie sind die Fourier-Transformation und ihre Rücktransformation definiert?

23. Fourier-Transformation

i. Beispiele

Bestimmen Sie

a) die Fourier-Transformierte von $f(x) = \cos(ax)$.

b) die Inverse Fourier-Transformierte der Funktion $\tilde{g}(k) = \mathrm{i}\pi k\,\Theta(1-|k|)$, wobei Θ die Heaviside-Funktion ist.

ii. Eigenschaften

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fourier-Transformierte durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

a) $f(x)$ ist genau dann reell, wenn $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$.

b) $f(x)$ ist genau dann rein imaginär, wenn $\tilde{f}(-k) = -\tilde{f}(k)^*$.

24. Elektrodynamik im Fourier-Raum

i. Vorbereitung

a) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\big) = \mathrm{i}\vec{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$, wobei der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ die Ableitung $\partial/\partial\vec{r}$ bezeichnet.

b) Sei $\vec{V}(\vec{r}) = \tilde{\vec{V}}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Zeigen Sie, dass die Divergenz und die Rotation von $\vec{V}(\vec{r})$ durch

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) = \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{V}(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r}) = \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{V}(\vec{r})$$

gegeben sind.

ii. Maxwell-Gleichungen im Fourier-Raum

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik im Vakuum in Abwesenheit von Ladungen und Strömen an.

b) Sei $\vec{f}(t,\vec{r}) = \displaystyle\int \tilde{\vec{f}}(\omega,\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$ die Fourier-Darstellung eines Vektorfeldes $\vec{f}(t,\vec{r})$.

Welche Gleichungen zwischen $\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{k})$ und $\tilde{\vec{B}}(\omega,\vec{k})$ folgen aus den Maxwell-Gleichungen der Frage **a)**? Können Sie daraus die (Ihnen bekannte) Dispersionsrelation von elektromagnetischen Wellen im Vakuum herleiten?

25. Integrationsmaß im Impulsraum

In manchen Berechnungen aus der Hochenergiephysik wird über alle möglichen Werte der Energie ($E_{\vec{p}}$) und des Impulses ($\vec{p}$) eines Teilchens integriert. Überzeugen Sie sich davon, dass sich das Maß für die Integration über Energie und Impuls in der (Lorentz-invarianten) Form

$$\int \frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}} = \int 2\pi\delta(p_\mu p^\mu - m^2c^2)\,\Theta(p^0)\,\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{p}}{(2\pi)^4} \tag{1}$$

schreiben lässt. Dabei ist Θ die Heaviside-Funktion, $\{p^\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ bezeichnet die (kontravarianten) Minkowski-Koordinaten des Viererimpulses ($p^0 \equiv E_{\vec{p}}/c, \vec{p}$) mit der relativistischen Dispersionsrelation $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$, und $\mathrm{d}^4\mathsf{p} \equiv \mathrm{d}p^0\,\mathrm{d}^3\vec{p}$. Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Terme im Integranden des Integrals auf der rechten Seite.

Zur Erinnerung: Das „Lorentz-Quadrat“ eines Vierervektors mit Minkowski-Koordinaten V^μ ist durch $V_\mu V^\mu = (V^0)^2 - \vec{V}^{\,2}$ gegeben.