

Übungsblatt Nr.7

Diskussionsthemen:

- Was sind die Kugelflächenfunktionen?
- Was sind die Eigenschaften der Dirac δ -Distribution?
- Wie sind die Fourier-Transformation und ihre Rücktransformation definiert?

19. Kugelflächenfunktionen

In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktionen als Orthonormalbasis der Funktionen auf der Einheitssphäre eingeführt. Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Funktionen in der Basis der Kugelflächenfunktionen

- i. $f(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi$; ii. $g(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$.

Hint: Sie benötigen nur Kugelflächenfunktionen der Ordnung $l \leq 2$. Anhand der Funktionen lässt sich bereits erahnen, welche Sie brauchen.

20. δ -Distribution: Darstellungen

- i. Sei $\delta_\epsilon(x) \equiv \epsilon / [\pi(x^2 + \epsilon^2)]$; prüfen Sie, dass δ_ϵ eine Darstellung der δ -Distribution ist. Zeigen Sie insbesondere $\int \delta_\epsilon(x) dx = 1$.
- ii. Für welchen Wert von α ist $\delta_\epsilon \equiv \alpha e^{-|x|/\epsilon}$ eine Darstellung der δ -Distribution?
- iii. Welche Darstellung $\Theta_\epsilon(x)$ der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ lässt sich aus $\tanh(x)$ basteln? Leiten Sie daraus eine Darstellung δ_ϵ der δ -Distribution ab.

21. δ -Distribution: Anwendungen

- i. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) \delta(ax + b) dx$ für $a \neq 0$;
- b) $\int_a^b x \arctan \frac{x}{c} \delta(x - c) dx$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x} \delta(x^2 - 1) dx$.

- ii. Betrachten Sie die Polarkoordinaten (r, θ) in der Ebene. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta)$ hat man die Gleichung $\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \alpha(r, \theta) \delta(r)$, wobei $\mathbf{r}$ den zweidimensionalen Ortsvektor bezeichnet?

22. Fourier-Darstellung der δ -Distribution

- i. Bestimmen Sie die Darstellung $D(x)$ der Einschränkung der δ -Distribution $\delta(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ als Fourierreihe.
- ii. Zeigen Sie, dass für eine 2π -periodische Testfunktion $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ gilt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D(x) dx = f(0).$$

23. Fourier-Transformation

- i. **Beispiele** Bestimmen Sie

- a) die Fourier-Transformierte von $f(x) = \cos(ax)$;

b) die Inverse Fourier-Transformierte der Funktion $\tilde{g}(k) = i\pi k \Theta(1 - |k|)$, wobei Θ die Heaviside-Funktion ist.

ii. Eigenschaften

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fourier-Transformierte durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

- a) $f(x)$ ist reell genau dann, wenn $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$.
- b) $f(x)$ ist rein imaginär genau dann, wenn $\tilde{f}(-k) = -\tilde{f}(k)^*$.