

Übungsblatt Nr.5

Diskussionsthemen:

- Was ist das Gram–Schmidt Verfahren und wie funktioniert es?
- Was ist die Bra-Ket-Notation?

15. Vektorraum und Skalarprodukt (2)

- i. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ der auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierten Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei, also

$$\mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R}) \equiv \left\{ p(x) : p(x) = a + bx + cx^2 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (1)$$

ausgestattet mit der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation durch reelle Zahlen, einen reellen Vektorraum bildet.

- ii. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f, g \in \mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R}) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf diesem Vektorraum definiert.

- iii. Verifizieren Sie, dass die Vektoren $\{e_i\}$ mit $e_1(x) = 1/\sqrt{2}$, $e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $e_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ bilden.

- iv. Wie ist der Dualraum $\mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R})^*$ definiert? Bestimmen Sie die Dualbasis $\{e_i^*\}$ des Dualraums. *Hint:* Um die Dualbasis zu bestimmen, brauchen Sie nur die Wirkung von deren Basisvektoren auf Vektoren von $\mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ anzugeben.

- v. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$L : \mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2([-1, 1], \mathbb{R}) \quad a + bx + cx^2 \mapsto b + 2cx$$

in der in ii. gegebenen Orthonormalbasis.

16. Vektorraum und Skalarprodukt (3)

Wir betrachten nun die Menge $\mathbb{P}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty[$ definierten Polynome mit reellen Koeffizienten.

- i. Zeigen Sie, dass diese Menge einen reellen Vektorraum bildet.

- ii. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f, g \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf diesem Vektorraum definiert.

- iii. Zeigen Sie, dass es genau eine Folge $\{(L_n)_{n \geq 0}\}$ von auf 1 normierten Orthogonalpolynomen (d.h. $\langle L_k, L_m \rangle = \delta_{km}$ für alle k, n) vom Grad n gibt, die $L_n(0) > 0$ erfüllt. Warum bildet $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ eine Basis des (Unter)Vektorraums $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ der Polynome vom Grad n ?

Die $\{L_n\}$ heißen *Laguerre-Polynome*.

- iv. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram–Schmidt Verfahrens die Polynome L_0, L_1, L_2 .

Hint: $\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n!$.