Übungsblatt Nr.3

Diskussionsthemen:

– Wann ist eine komplexe Funktion komplex differenzierbar?
– Was sind die Cauchy–Riemann Bedingungen? Was sind die geometrischen Bedeutungen der Cauchy–Riemann Bedingungen?

8. Cauchy–Riemann Bedingungen und Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Bestimmen Sie für jede der drei folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion komplex differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung in diesen Punkten. Gibt es Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktionen holomorph sind?

i. $f(z) = \dfrac{z}{z^*}$; **ii.** $g(z) = (x^2 + y) + \mathrm{i}(y^2 - x)$; **iii.** $h(z) = \sin(2\mathrm{e}^z)$

9. Holomorphe Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ eine holomorphe Funktion.

i. Zeigen Sie, dass $f^*(z^*)$ ebenfalls holomorph ist.

ii. Zeigen Sie, dass u und v die Gleichung $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ erfüllen.

iii. Zeigen Sie, dass Divergenz und Rotation der reellen Vektorfelder $\vec{F}_R = u(x, y)\vec{\mathrm{e}}_x - v(x, y)\vec{\mathrm{e}}_y$ und $\vec{F}_I = v(x, y)\vec{\mathrm{e}}_x + u(x, y)\vec{\mathrm{e}}_y$ verschwinden, wobei $\vec{\mathrm{e}}_x$ und $\vec{\mathrm{e}}_y$ die Einheitsvektoren in x- und y-Richtung sind.

10. Cauchy–Riemann Bedingungen als Einschränkungen an Real- und Imaginärteile

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ eine holomorphe Funktion, deren Imaginärteil als $v(x, y) = \mathrm{e}^{-y}\sin(x)$ bekannt ist. Bestimmen Sie die Funktion $f(z)$

11. Differenzierbarkeit von $\log(z)$

Der komplexe Logarithmus $\log : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z) + 2\pi k$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^z, für die für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\mathrm{d}\mathrm{e}^z/\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z$ gilt.

i. Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}^-\}$ die Ableitung von $\log z$.

ii. Begründen Sie kurz, warum $\log z$ für $z \in \mathbb{R}_-$ nicht differenzierbar ist. Gibt es dennoch Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktion holomorph ist?