Übungsblatt Nr.2

Diskussionsthema: Zweige von mehrdeutigen Funktionen.

4. Wurzeln komplexer Zahlen

i. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^5 = 1$, $z^4 = -1$, $z^3 = -i$.

ii. a) Geben Sie die n-ten Einheitswurzeln $\{z_k\}$ für $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ an, d.h. alle Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Beweisen Sie, dass für $n > 1$ die Summe der n-ten Einheitswurzeln verschwindet, d.h. $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

Hint: Verwenden Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

5. Darstellung komplexer Abbildungen (1)

i. Bestimmen Sie für $f(z) = z^3$ und $g(z) = i\bar{z}$ die Abbildung der Punkte $z = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ und visualisieren Sie deren Abbildung in der komplexen Ebene.

ii. Bestimmen Sie den Bildbereich der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ für die Abbildung des ersten Quadranten $Q_I = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \ \& \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und der Einheitskreisscheibe $\mathcal{C}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

iii. Bestimmen Sie die Haupt- und Nebenzweige der Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = z^{1/3}$.

6. Darstellung komplexer Abbildungen (2)

i. Welche Form haben Funktionen, die einer Drehung um einen beliebigen Punkt z_0 in der komplexen Ebene entsprechen?

ii. Gleiche Frage für die Spiegelung an der Geraden, die durch den Punkt z_0 mit dem Gradienten $a \in \mathbb{C}$ läuft.

7. Nullstellen von komplexen Funktionen

Ausgehend aus dem komplexen Exponentialfunktion e^z mit $z \in \mathbb{C}$ lassen sich trigonometrische Funktionen oder Hyperbelfunktionen definieren, z.B. (vgl. Aufgabe **2.**)

$$\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad , \quad \cosh(z) \equiv \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} \quad \text{usw.}$$

Ermitteln Sie alle komplexen Nullstellen von $\sin z$ und $\cosh z$.