

## Übungsblatt Nr.13

### Diskussionsthemen:

- Wie berechnet man ein komplexes Integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$ ?
- Welche Beziehung besteht zwischen dem Integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  und einer Stammfunktion  $F(z)$  der Funktion  $f(z)$ ?
- Was besagt der Cauchy-Integralsatz?
- Was besagt der Residuensatz?

### 41. Holomorphie und Stammfunktionen

Betrachten Sie die den Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion  $w : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  mit  $z \mapsto w(z) = z^{1/n}$  und  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- i. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion  $w$  und geben Sie den Definitionsbereich dieser an.
- ii. Bestimmen Sie durch explizite Berechnung das komplexe Konturintegral  $\oint_{\partial K_R(0)} w(z) dz$  entlang eines Kreises mit Radius  $R > 0$  und Zentrum im Ursprungspunkt.
- iii. Bestimmen Sie das Integral aus ii. mithilfe der Stammfunktion.

*Hinweis:* Beachten Sie den Definitionsbereich der Stammfunktion und wählen Sie die Kontur entsprechend.

### 42. Residuen

Betrachten Sie die Funktion  $f(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$  mit  $N \in \mathbb{N}^*$  und komplexen Koeffizienten  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Bestimmen Sie das komplexe Konturintegral  $\oint_{\partial K_R(0)} f(z) dz$ .

### 43. Berechnung eines Konturintegrals mit Laurent-Reihe

Betrachten Sie die Funktion  $f(z) = \exp(-1/z)$ .

- i. Bestimmen Sie die Darstellung der Funktion als Laurent-Reihe um den Punkt  $z_0 = 0$ .
- ii. Benutzen Sie das Ergebnis aus i. um das Konturintegral  $\oint_{\partial K_R(0)} f(z) dz$  zu bestimmen.

### 44. Residuensatz

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_{\partial \Delta} \frac{e^{-z} dz}{z^3 + 2z^2 - 3z - 10},$$

wobei  $\Delta$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $+i$ ,  $-i$  und  $3$  ist, und  $\partial \Delta$  seinen Rand bezeichnet. Der Rand soll gegen den Uhrzeigersinn umlaufen werden.

*Hinweis:* Eine der Nennernullstellen liegt bei  $z = 2$ .