Übungsblatt Nr.12

Diskussionsthemen: Wie kann man Singularitäten klassifizieren?

37. Entwicklung in Laurent-Reihe

i. Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\dfrac{1}{z-2}$ mit der Konvergenzkreisscheibe $|z| < 2$.

ii. Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\dfrac{1}{z-2}$, die für $|z| > 2$ konvergiert.

iii. Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ mit dem Konvergenzkreisring $2 < |z| < 3$.

38. Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z-3)}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Pole der Funktion.

39. Singularitäten und Laurent-Reihen

Betrachten Sie die Funktionen $f(z) = \dfrac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2}$, $g(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ und $h(z) = \dfrac{\tan(z)}{z}$.

i. Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktionen $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ und klassifizieren Sie diese hinsichtlich ihrer Ordnung.

ii. Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurent-Reihe um $z_0 = \pi$ und bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe.

Hinweis: Eine Laurent-Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Nebenteil und ihr Hauptteil konvergieren.

40. Verhalten einer Funktion

Betrachtet wird die Funktion $Q(z) = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{z+1}{z-1}$ mit einem Schlitz zwischen $z = -1$ und $z = +1$.

i. Bestimmen Sie $\dfrac{1}{2}\big[Q(x+\mathrm{i}0^+) - Q(x-\mathrm{i}0^+)\big] \equiv \lim\limits_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \dfrac{1}{2}\big[Q(x+\mathrm{i}\epsilon) - Q(x-\mathrm{i}\epsilon)\big]$ für $x \in \mathbb{R}$.

ii. Bestimmen Sie ebenfalls $\dfrac{1}{2}\big[Q(x+\mathrm{i}0^+) + Q(x-\mathrm{i}0^+)\big]$ für $x \in \mathbb{R}$.