Übungsblatt Nr.11

Diskussionsthemen: Wo konvergieren Potenzreihen? Was sind Laurent-Reihen?

33. Bessel-Differentialgleichung in der Physik

Betrachtet wird die (d'Alembert)-Wellengleichung

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(t,\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) mit $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$: dann lautet der d'Alembert-Operator

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Sei angenommen, dass sich eine Welle in z-Richtung propagiert. Dafür wird ein Separationsansatz gemacht:

$$\phi(t,r,\varphi,z) = u(r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\cos(\omega t - kz) \tag{3}$$

i. Warum soll n in diesem Ansatz eine ganze Zahl sein?

ii. Zeigen Sie, dass die d'Alembert-Gleichung mit dem Ansatz (3) zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)u(r) = 0 \tag{4}$$

führt.

iii. Sei angenommen, dass $\omega^2 \geq c^2k^2$. Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung (4) in der Form der Bessel-Differentialgleichung der Aufgabe **31.** umschreiben lässt.

Bemerkung: Für ein anderes physikalisches Problem, in dem Bessel-Funktionen vorkommen, können Sie das Kapitel 23 des zweiten Bands der Feynman-Vorlesungen lesen.

34. Potenzreihen

i. In Aufgabe **11.** haben Sie die Ableitung von $\log(z)$ gefunden. Benutzen Sie das Ergebnis, um die folgenden Darstellungen in Potenzreihen zu bestimmen:

a) die Potenzreihe von $\log(1+z)$ um $z_0 = 0$;

b) die Potenzreihen von $\log(z)$ um $z_0 = +1$ und um $z_0 = +\mathrm{i}$.

ii. Skizzieren Sie die Konvergenzbereiche aller Reihen in der komplexen Ebene.

35. Laurent-Reihen

Bestimmen sie die Laurent-Reihen um den Punkt $z_0 = 0$ der folgenden Funktionen:

a) $f_1(z) = \dfrac{z^6+1}{z^2+1}$; **b)** $f_2(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^3}$.

36. Zeta-Funktion

Betrachtet wird die Riemannsche ζ-Funktion $\zeta(z)$, die für $\mathrm{Re}(z) > 1$ als

$$\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

definiert werden kann. Dabei ist $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ die (Eulersche) Γ-Funktion.

i. Zeigen Sie, dass $\zeta(z)$ als $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ dargestellt werden kann.

ii. Leiten Sie die alternative Darstellung $\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t + 1} \, \mathrm{d}t$ her.

Hinweis: $\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{t/2} - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{t/2} + 1}\right)$.