Übungsblatt Nr.10

Diskussionsthemen:

– Eigenwerte und Eigenfunktionen von linearen Differentialoperatoren
– Greensche Funktionen

29. Legendre-Differentialgleichung

Die Legendre-Differentialgleichung lautet

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0 \quad \text{für } 1 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

i. Legendre-Polynome

a) In Aufgabe **15.iii)** wurden 3 Polynome $\{e_1, e_2, e_3\}$ definiert. Überprüfen Sie, dass diese Polynome die Legendre-Differentialgleichung für bestimmte Werte von n (welche?) erfüllen.

b) Folgern Sie aus dem Ergebnis von **a)** die ersten drei Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2, die dadurch definiert sind, dass P_n Lösung der Differentialgleichung (1) mit $P_n(1) = 1$ ist.

ii. Andere Lösungen

a) Zeigen Sie, dass $u(x) \equiv x$ und $v(x) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ Lösungen der Legendre-Differentialgleichung sind. Welche sind die entsprechenden Eigenwerte?

b) Ermitteln Sie den Wert von $\langle u|v\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. Warum sind $u(x)$ und $v(x)$ nicht orthogonal zueinander?

30. Lösungen der Sturm–Liouville-Gleichung

Die Funktionen $u_n(x)$, $u_m(x)$ genügen der Sturm–Liouville-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda w(x)u(x) = 0,$$

und seien orthogonal zueinander. (Die entsprechenden Eigenwerte λ_n, λ_m seien ungleich.) Zeigen Sie, dass u'_n und u'_m auch (mit $p(x)$ als Gewichtsfunktion) orthogonal zueinander sind, wenn angemessene Randbedingungen erfüllt sind.

31. Bessel-Differentialgleichung

Die Bessel-Differentialgleichung lautet

$$x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - n^2)f(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und (hier) } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Reihendarstellung $J_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$ die Differentialgleichung löst.

32. Greensche Funktionen

Wenn λ_n und v_n Eigenwerte und orthonormierte Eigenfunktionen zu einem Differentialoperator $\mathcal{L}$ sind,

$$\mathcal{L}v_n(x) + \lambda_n w(x)v_n(x) = 0 \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

hilft uns die Greensche Funktion $G(x;y) \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(y)}{\lambda_n}$ zur Lösung von $\mathcal{L}f(x) + g(x) = 0$ durch

$$f(x) = \int_a^b G(x;y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Interpretieren Sie diese Gleichungen in der Sprache der Matrizen. Welche Matrix entspricht der Greenschen Funktion? Welche Rolle spielt die Bedingung, dass es keinen Nulleigenwert gibt?