

Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome

1 Kugelflächenfunktionen

1.1 Definition

Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitskugelfläche von $\mathbb{R}^3$, deren Punkte sich durch den Polarwinkel $\theta \in [0, \pi]$ und den Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ kennzeichnen lassen.

Die (skalaren) *Kugelflächenfunktionen* $Y_{\ell,m}$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl ist und $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, \ell\}$ ganzzahlig ist, sind komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{S}^2$, die gleichzeitig Eigenfunktionen zu den Differentialoperatoren

$$\frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{und} \quad -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1)$$

mit den jeweiligen Eigenwerten $\ell(\ell+1)$ und m sind:

$$\frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (2a)$$

und

$$-i \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m Y_{\ell,m}(\theta, \varphi). \quad (2b)$$

Solche Eigenfunktionen sind nur bis auf eine multiplikative komplexe Konstante definiert. Um die letztere festzulegen, werden zusätzliche Anforderungen an $Y_{\ell,m}$ gestellt:

- Die Kugelflächenfunktionen sind auf 1 normiert:

$$\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) d\varphi \right] \sin \theta d\theta = \int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) d^2\Omega = 1 \quad (3)$$

wobei $d^2\Omega$ das Raumwinkelement bezeichnet.⁽¹⁾

- Die relativen Phasen von Kugelflächenfunktionen mit dem gleichen Wert von ℓ sind so gewählt, dass die Beziehung

$$e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} Y_{\ell,m-1}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

gilt.

- $Y_{\ell,0}(0,0)$ ist reell und positiv.

Die beiden letzten Anforderung entsprechen der Condon^(a)–Shortley^(b)-Phasenkonvention.

Diese Eigenschaften werden durch die folgenden Funktionen erfüllt: für $\ell = 0$

$$Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad (5a)$$

⁽¹⁾ Anstatt $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ findet man auch die Schreibweise $Y_{\ell,m}(\Omega)$.

^(a) E. U. CONDON, 1902–1974 ^(b) G. H. SHORTLEY, 1910–1980

für $\ell = 1$

$$Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (5b)$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}; \quad (5c)$$

für $\ell = 2$

$$Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (5d)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \quad (5e)$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}; \quad (5f)$$

usw. Allgemeiner gilt

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (6)$$

wobei die Funktionen $P_{\ell,m}$ im Abschn. 2 unten definiert und weiter diskutiert werden.

1.2 Einige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

Jetzt werden ein paar wichtige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen $\{Y_{\ell,m}\}$ ohne Beweis aufgelistet.

Kugelflächenfunktionen als orthonormierte Hilbert-Basis von $L^2(\mathbb{S}^2)$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ sind nicht nur auf 1 normiert, sie sind auch orthogonal zu einander:

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell',m'}(\theta, \varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) d^2\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (7)$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden einen vollständigen Satz von quadratintegrierbaren Funktionen auf $\mathbb{S}^2$:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta', \varphi')^* Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \frac{\delta(\theta' - \theta) \delta(\varphi' - \varphi)}{\sin \theta} = \delta^{(2)}(\Omega' - \Omega). \quad (8)$$

Aus den beiden letzteren Eigenschaften folgt, dass sich jede quadratintegrierbare Funktion f auf $\mathbb{S}^2$ als Summe

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (9a)$$

von Kugelflächenfunktionen schreiben lässt, wobei die Koeffizienten $a_{\ell,m}$ eindeutig durch

$$a_{\ell,m} = \int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)^* f(\theta, \varphi) d^2\Omega \quad (9b)$$

gegeben sind.

Parität

Unter der gleichzeitigen Transformation $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$, entsprechend dem Winkelanteil der Raumspiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, hat die Kugelflächenfunktion $Y_{\ell,m}$ die Parität $(-1)^\ell$:

$$Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Rekursionsrelation

Kugelflächenfunktion mit unterschiedlichen Werten von ℓ genügen der Beziehung

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \cos \theta = \sqrt{\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+3)(2\ell+1)}} Y_{\ell+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}} Y_{\ell-1,m}(\theta, \varphi). \quad (11)$$

Die Gleichung gilt auch im Fall $m = \pm\ell$: dann ist der Term unter der Wurzel im zweiten Summanden automatisch Null, so dass die Frage der Bedeutung von $Y_{\ell-1,\pm\ell}$ keine Rolle spielt.

2 Legendre-Polynome

2.1 Legendre-Polynome

Die *Legendre*^(c)-*Polynome* $P_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind Lösungen für $x \in [-1, 1]$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (*Legendre-Differentialgleichung*)

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad (12)$$

mit der zusätzlichen (Normierungs-)Bedingung $y(1) = 1$.

Bei gegebener $n \in \mathbb{R}$ hat diese Differentialgleichung zwei linear unabhängige Lösungen, die im Allgemeinen singular in $x = -1$ oder $x = 1$ sind. Nur im Fall $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine einzige Lösung P_n mit $P_n(1) = 1$, die auch in $x = -1$ regulär ist.

Für diese Lösungen gilt die Rodrigues^(d)-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Mithilfe dieser Formel kann man die ersten Legendre-Polynome berechnen:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5x^3 - 3x}{2} \\ P_4(x) &= \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Allgemeiner findet man rekursiv, dass P_n ein Polynom vom Grad n ist, das im Intervall $] -1, 1[$ genau n Nullstellen hat.

Weitere nützliche Eigenschaften der Legendre-Polynome sind die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (15)$$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}. \quad (16)$$

Hier bezieht sich die Orthogonalität auf das herkömmliche Skalarprodukt von (reellen) quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Aus der Rodrigues-Formel (13) folgt sofort die Parität der Legendre-Polynome:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (17)$$

^(c)A.-M. LEGENDRE, 1752–1833 ^(d)O. RODRIGUES, 1795–1851

In den physikalischen Anwendungen werden die Legendre-Polynome meistens mit dem Argument $x = \cos \theta$ benutzt, wobei $\theta \in [0, \pi]$ einen Winkel — meistens den Polarwinkel des Kugelkoordinatensystems — bezeichnet. Ausgedrückt durch θ wird die Legendre-Differentialgleichung (12) zu

$$y''(\theta) + \cot \theta y'(\theta) + n(n+1)y(\theta) = 0. \quad (18)$$

Dann lautet die Rodrigues-Formel

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [(\sin \theta)^{2n}] \quad (19)$$

Schließlich wird die Orthogonalitätsrelation (16) zu

$$\int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}. \quad (20)$$

2.2 Zugeordnete Legendre-Polynome

Die sogenannten *zugeordneten Legendre-Polynome* $P_{\ell,m}(x)$, die eigentlich nicht immer Polynome sind, sind Lösungen für $x \in [-1, 1]$ der *verallgemeinerten Legendre-Differentialgleichung*

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0. \quad (21)$$

Genauer ist $P_{\ell,m}$ eine nicht-singuläre Lösung dieser Differentialgleichung, die nur für $\ell \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, 0, 1, \dots, \ell\}$ existiert.

Offensichtlich ergibt sich für $m = 0$ und beliebige $\ell \in \mathbb{N}$ das Legendre-Polynom P_ℓ :

$$P_{\ell,0}(x) = P_\ell(x) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Für $m \geq 0$ kann $P_{\ell,m}$ durch sukzessive Ableitungen von P_ℓ abgeleitet werden:⁽²⁾

$$P_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}, m \in \{0, 1, \dots, \ell\}. \quad (23a)$$

Unter Nutzung der Rodrigues-Formel (13) für das Legendre-Polynom P_ℓ ergibt sich

$$P_{\ell,m}(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} [(1-x^2)^\ell] \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}, m \in \{0, 1, \dots, \ell\}. \quad (23b)$$

Für $m < 0$ wird $P_{\ell,m}$ durch die Beziehung

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} P_{\ell,-m}(x) \quad (24)$$

definiert.

Die ersten zugeordneten Polynome mit $\ell \leq 2$ und $m \neq 0$ lauten

$$P_{1,1}(x) = \sqrt{1-x^2} = -2P_{1,-1}(x) \quad (25a)$$

$$P_{2,1}(x) = 3x\sqrt{1-x^2} = -6P_{2,-1}(x) \quad , \quad P_{2,2}(x) = 3(1-x^2) = 24P_{2,-2}(x). \quad (25b)$$

Dazu findet man noch

$$P_{\ell,\ell}(x) = (2\ell-1)!!(1-x^2)^{\ell/2}, \quad (25c)$$

wobei die Doppelfakultät $(2\ell-1)!!$ das Produkt aller ungeraden Zahlen kleiner gleich $2\ell-1$ ist:

$$(2\ell-1)!! \equiv (2\ell-1)(2\ell-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}.$$

⁽²⁾Genauer definieren diese Formeln $P_{\ell,m}$, weil die Differentialgleichung invariant unter der Substitution $m \rightarrow -m$ ist, und somit den Unterschied zwischen positiven und negativen Werten von m nicht erlaubt.

Allgemeiner wird $P_{\ell,m}$ mit gerader m ein Polynom vom Grad ℓ sein, während $P_{\ell,m}(x)$ im Fall einer ungeraden m das Produkt aus $\sqrt{1-x^2}$ mit einer Polynomfunktion vom Grad $\ell-1$ ist.

Die zugeordneten Legendre-Polynome erfüllen verschiedene Orthogonalitätsrelationen, für Funktionen mit gleicher ℓ oder mit gleicher m . Die letztere lautet

$$\int_{-1}^1 P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) dx = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}, \quad (26)$$

entsprechend einer Verallgemeinerung der Beziehung (16) für Legendre-Polynome.

Wenn man die Substitution $x = \cos \theta$ macht, wird die verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung zu

$$y''(\theta) + \cot \theta y'(\theta) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] y(\theta) = 0. \quad (27)$$

Dann lauten die zugeordneten Legendre-Polynome mit nicht-negativer m

$$P_{\ell,m}(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \quad m \in \{0, 1, \dots, \ell\}, \quad (28)$$

woraus sich die Funktion mit negativer m mithilfe der Beziehung (24) ableiten lassen.

Schließlich lautet die Orthogonalitätsrelation bei fester m

$$\int_0^\pi P_{\ell,m}(\cos \theta) P_{\ell',m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}. \quad (29)$$