Fourier-Transformation

Hiernach werden einige Definitionen und Ergebnisse über die Fourier[(a)]-Transformation dargestellt.

1 Definition

Theorem & Definition: Sei f eine integrierbare komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Das absolut konvergente Integral

$$\boxed{\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x} \tag{1}$$

definiert eine stetige komplexwertige Funktion $\tilde{f}$ der Variablen $k \in \mathbb{R}$, die *Fourier-Transformierte* von f genannt wird.

Die Definition kann problemlos auf Funktionen mehrerer Variablen $(x_1, \ldots, x_n) \equiv \boldsymbol{x}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ erweitert werden. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $\boldsymbol{k} \equiv (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Fourier-Transformierte

$$\boxed{\tilde{f}(\boldsymbol{k}) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}^n\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

mit $\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} \equiv \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ eine komplexwertige Funktion der Variablen $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen:

∗ Die Definition (2) lässt sich auf weitere Klassen von Funktionen verallgemeinern, insbesondere auf die Räume $L^2(\mathbb{R}^n)$ der quadratintegrierbaren Funktionen und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen.

∗ Die Definitionen (1), (2) benutzen die „Physiker-Konvention“. In der Mathematik wird eher

$$(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}^n\boldsymbol{x} \tag{3}$$

mit einem zusätzlichen Vorfaktor definiert.

2 Inverse Fourier-Transformation

Für die Funktionen, die von Relevanz in der Physik sind, kann die Fourier-Transformation (1) von $f(x)$ nach $\tilde{f}(k)$ kann invertiert werden; es gilt dann

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}} \tag{4}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung wird oft als *Fourier-Darstellung* von $f(x)$ bezeichnet.

[(a)] J. Fourier, 1768–1830

Allgemeiner lautet die Rücktransformationsformel für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}} \tag{5}$$

mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathrm{d}^k\boldsymbol{k} \equiv \mathrm{d}k_1 \cdots \mathrm{d}k_n$.

Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\boldsymbol{k})$ einer integrierbaren Funktion $f(\boldsymbol{x})$ ist stetig und sie verschwindet im Unendlichen — $\tilde{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ —, entsprechend dem Lemma von Riemann[b]–Lebesgue[c]. Dafür ist $\tilde{f}$ aber nicht unbedingt integrierbar, so dass die Fourier-Transformation möglicherweise nicht invertierbar sein kann.

Sei f eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass sowohl f als auch alle deren Ableitungen im Unendlichen „schnell fallen“:[1] f heißt eine Schwartz[d]-Funktion, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist f auch integrabel und deren Fourier-Transformierte $\tilde{f}$ ist ebenfalls eine Schwartz-Funktion, so dass die rechte Seite der Formel (4) wohldefiniert ist.

Beweis der Rücktransformationsformel (4):[2]
Die Multiplikation beider Seiten der Gl. (1) mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}$ ergibt

$$\tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\, \mathrm{d}x.$$

Nach Integration dieser Gleichheit über $k \in \mathbb{R}$ kommt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\, \mathrm{d}x\right] \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\, \mathrm{d}k\right] \mathrm{d}x.$$

Dabei ist das Integral in den eckigen Klammern im letzten Term gleich $2\pi\delta(x-x')$, woraus das gesuchte Ergebnis folgt. □

Bemerkung: In der „Mathematiker-Konvention“ lautet die Rücktransformation

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}^n\boldsymbol{k}, \tag{6}$$

mit dem gleichen Vorfaktor $1/(2\pi)^{n/2}$ wie in der direkten Transformationsformel (3). Dies ist zwar mehr elegant als die Physiker-Konvention und führt zu einer Vereinfachung beim Satz von Parseval[e] (Abschn. 3.2), aber auch zu einem komplizierteren Faltungstheorem (§ 3.1 c).

3 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Jetzt werden einige in der Physik oft benutzten Eigenschaften der Fourier-Transformation dargelegt, in den meisten Fällen ohne Beweis.

3.1 Erste Eigenschaften

3.1 a Linearität

Seien f_1, f_2 zwei Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, deren Fourier-Transformierten definiert sind, und $\lambda \in \mathbb{C}$; dann gilt

$$\widetilde{\lambda f_1 + f_2}(\boldsymbol{k}) = \lambda \tilde{f}_1(\boldsymbol{k}) + \tilde{f}_2(\boldsymbol{k}) \qquad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Somit ist die Fourier-Transformation eine lineare Abbildung (zwischen Funktionenräumen).

[1] Technisch soll das Produkt von f, oder irgendeiner deren Ableitung, mit jedem Polynom in n Variablen immer beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ bleiben.

[2] Wer die Nutzung der δ-Distribution vermeiden möchte, kann die Gl. (1) mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}\mathrm{e}^{-\epsilon k^2/2}$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ multiplizieren, die Transformationsformel für Gaußsche Funktionen (26) benutzen, und den Limes $\epsilon \to 0$ betrachten.

[b] B. Riemann, 1826–1866 [c] H. Lebesgue, 1875–1941 [d] L. Schwartz, 1915–2002 [e] M.-A. Parseval, 1755–1836

3.1 b Differentiation

Sei $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen $\alpha_i \in \mathbb{N}$; als $|\boldsymbol{\alpha}|$ wird die Summe $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ bezeichnet. Wiederum gilt für $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv (k_1)^{\alpha_1} \cdots (k_n)^{\alpha_n}.$$

Sei noch f eine (genug differenzierbare) Funktion der Variablen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Der Differentialoperator $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ sei durch

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f(\boldsymbol{x})}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_n}}$$

definiert.

Dann gelten

$$\widetilde{\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f}(\boldsymbol{k}) = \mathrm{i}^{|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \tag{8a}$$

und

$$\widetilde{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} f}(\boldsymbol{k}) = \mathrm{i}^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{f}(\boldsymbol{k}), \tag{8b}$$

wenn alle in diesen Ausdrücken auftretenden Funktionen definiert sind — was z.B. bei Schwartz-Funktionen immer der Fall ist. Laut diesen Gleichungen wird eine Ableitung im „Ortsraum" der Variablen x zu einer Multiplikation mit der Variablen im Fourier-Raum und umgekehrt.

Insbesondere gelten im Fall $n = 1$ und für $\alpha_1 = 1$

$$\mathrm{i}k\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \quad \text{i.e.} \quad f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}k\tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tag{9a}$$

und

$$\mathrm{i}\tilde{f}'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \quad \text{i.e.} \quad x f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\tilde{f}'(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}. \tag{9b}$$

Bemerkung: Diese Eigenschaft wird zu Nutze gemacht, um Differentialgleichung im Ortsraum in algebraische Gleichungen im Fourier-Raum zu transformieren.

3.1 c Faltungstheorem

Seien f_1 und f_2 zwei Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Ihre *Faltung* $f_1 * f_2$ wird als

$$(f_1 * f_2)(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) f_2(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}^n\boldsymbol{\xi} \tag{10}$$

definiert — unter der Voraussetzung, dass das Integral auf der rechten Seite definiert ist.

Das Faltungstheorem besagt, dass die Faltung unter Fourier-Transformation in eine Multiplikation überführt wird, und umgekehrt. Somit ist die Fourier-Transformierte der Faltung $f_1 * f_2$ gleich dem Produkt von den jeweiligen Fourier-Transformierten:

$$\widetilde{f_1 * f_2}(\boldsymbol{k}) = \tilde{f}_1(\boldsymbol{k}) \tilde{f}_2(\boldsymbol{k}) \qquad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n. \tag{11a}$$

Umgekehrt ist die Fourier-Transformierte des Produkts $f_1 f_2$ gleich der Faltung $\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2$ der Fourier-Transformierten:

$$\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(\boldsymbol{k}) = \widetilde{f_1 f_2}(\boldsymbol{k}) \qquad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n. \tag{11b}$$

Wenn f_1 und f_2 integrierbar sind, ist deren Faltung $f_1 * f_2$ definiert und ebenfalls integrierbar, so dass alle in Gl. (11a) implizit auftretenden Integrale definiert sind.

Bemerkung: In der Mathematiker-Konvention (3), (6) sollen die rechten Seiten der beiden Gl. (11) mit dem zusätzlichen Faktor $(2\pi)^{n/2}$ multipliziert werden.

3.2 Satz von Parseval

Seien f_1 und f_2 zwei quadratintegrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ ihre jeweiligen Fourier-Transformierten. Dann gilt der *Satz von Parseval* (oder *Parseval–Plancherel*[f])

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x})^* f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_1(\boldsymbol{k})^* \tilde{f}_2(\boldsymbol{k})\,\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}.} \tag{12}$$

Daraus folgt insbesondere im Fall $f_2 = f_1 \equiv f$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(\boldsymbol{k})|^2\,\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}.} \tag{13}$$

Dies besagt, dass die Fourier-Transformation eine Isometrie — bis auf den Faktor $1/(2\pi)^n$ — zwischen Funktionenräumen ist.

Bemerkung: In der Mathematiker-Konvention fällt der Faktor $1/(2\pi)^n$ weg von diesen Gleichungen.

Beweis der Gleichung (12):
Unter Einführung der Fourier-Darstellungen (5) von $f_1(\boldsymbol{x})$ und $f_2(\boldsymbol{x})$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x})^* f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_1(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}\right]^*\left[\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_2(\boldsymbol{k}')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^n}\right]\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_1(\boldsymbol{k})^*\left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_2(\boldsymbol{k}')\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x}\right]\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^n}\right)\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}.\end{aligned}$$

Das Integral über $\boldsymbol{x}$ ergibt $(2\pi)^n\delta^{(n)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$, so dass das Integral über $\boldsymbol{k}'$ trivial wird: am Ende bleibt genau Gl. (12) übrig. □

3.3 Unschärferelation

Seien f und $\tilde{f}$ ein Paar von Fourier-transformierten Funktionen, der Einfachheit halber auf $\mathbb{R}$. Je breiter der Bereich ist, wo $f(x)$ signifikante Werte annimmt, desto schmaler ist das Gebiet, wo $\tilde{f}(k)$ „lokalisiert“ ist, und umgekehrt. Diese Reziprozität der Breiten der Funktionen im Orts- und im Fourier-Raum kann anhand einer Ungleichung genauer ausgedrückt werden.

Sei f eine quadratintegrierbare komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Auf Kosten einer Reskalierung kann man

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1 \tag{14}$$

wählen. Dann lässt sich $|f(x)|^2$ als die Wahrscheinlichkeitsdichte einer kontinuierlichen Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ interpretieren.

Anhand dieser Wahrscheinlichkeitsdichte definiert man die Erwartungswerte von x

$$\langle x\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{15a}$$

und von x^2

$$\langle x^2\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x, \tag{15b}$$

sowie die Varianz von x

$$(\Delta x)^2 \equiv \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2, \tag{15c}$$

wobei angenommen wird, dass die Integrale konvergieren.

[f] M. Plancherel, 1885–1967

Dank dem Satz von Parseval führt die Normierungsbedingung (14) zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = 1 \tag{16}$$

für die Fourier-Transformierte $\tilde{f}$: wiederum kann $|\tilde{f}(k)|^2/2\pi$ als die Wahrscheinlichkeitsdichte einer kontinuierlichen Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ interpretiert werden, womit man

$$\langle k \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k|\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \quad , \quad \langle k^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k^2\,|\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}, \tag{17a}$$

und noch

$$(\Delta k)^2 \equiv \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \tag{17b}$$

definieren kann.

Mit den Definition (15), (17) der Varianzen $(\Delta x)^2$, $(\Delta k)^2$ gilt für die positiven Standardabweichungen Δx und Δk die Ungleichung („Unschärferelation“)

$$\boxed{(\Delta x)(\Delta k) \geq \frac{1}{2}.} \tag{18}$$

Beweis: Auf Kosten von Variablenänderungen $x \to x - \langle x \rangle$, $k \to k - \langle k \rangle$ kann man annehmen, dass $f(x)$ und $\tilde{f}(k)$ zentriert sind, i.e. $\langle x \rangle = 0$, $\langle k \rangle = 0$ und daher $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$, $(\Delta k)^2 = \langle k^2 \rangle$.

Man prüft einfach nach, dass solche Substitutionen die Betragsquadrate $|f(x)|^2$ und $|\tilde{f}(k)|^2$ unverändert lassen.

Betrachte man dann das Integral

$$\mathcal{I}(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \big|k\tilde{f}(k) + \xi\tilde{f}'(k)\big|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \quad \text{mit } \xi \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Das Ausmultiplizieren des Betragsquadrats ergibt

$$\mathcal{I}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} k^2|\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} + \xi\int_{-\infty}^{\infty} k\big[\tilde{f}(k)^*\tilde{f}'(k) + \tilde{f}'(k)^*\tilde{f}(k)\big] \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} + \xi^2\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}'(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}. \tag{20}$$

Dabei ist der erste Term auf der rechten Seite genau $(\Delta k)^2$. Mithilfe einer partielle Integration lautet das Integral des zweiten Terms

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\big[\tilde{f}(k)^*\tilde{f}'(k) + \tilde{f}'(k)^*\tilde{f}(k)\big] \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} k\,\frac{\mathrm{d}|\tilde{f}(k)|^2}{\mathrm{d}k} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = -\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = -1,$$

wobei der hier nicht-geschriebene integrierte Term $\big[k\tilde{f}(k)\big]_{-\infty}^{\infty}$ Null sein muss, damit $\langle k \rangle$ definiert ist. Schließlich ist $\tilde{f}'(k)$ im Integranden des dritten Terms die Fourier-Transformierte von $-\mathrm{i}xf(x)$, vgl. Gl. (9b). Unter Nutzung des Satzes von Parseval (12) gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}'(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |-\mathrm{i}xf(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = (\Delta x)^2.$$

Insgesamt wird Gl. (20) zu

$$\mathcal{I}(\xi) = (\Delta k)^2 - \xi + \xi^2(\Delta x)^2. \tag{21}$$

Da $\mathcal{I}(\xi)$ aus der Definition (19) offensichtlich positiv für alle ξ ist, soll die Diskriminante dieses quadratischen Polynoms in ξ negativ sein, i.e.

$$1 - 4(\Delta k)^2(\Delta x)^2 \leq 0,$$

entsprechend der Ungleichung (18). □

Bemerkung: Man kann noch zeigen, dass die Gleichheit nur im Fall von Gaußschen Funktionen gilt.

4 Einige oft auftretende Fourier-Transformations-Paare auf $\mathbb{R}$

Hiernach bezeichnen f, g und $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ Funktionen und deren jeweiligen Fourier-Transformierten.

- Ortsverschiebung $(x_0 \in \mathbb{R})$: $$f(x) = g(x + x_0) \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\,\tilde{g}(k) \tag{22}$$
- Ortsskalierung $(a \in \mathbb{R}^*)$: $$f(x) = g(ax) \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{a}\tilde{g}\left(\frac{k}{a}\right) \tag{23}$$
- Konstante Funktion $(a \in \mathbb{R})$: $$f(x) = a \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = 2\pi a\delta(k) \tag{24}$$
- Dirac[(g)]-Distribution: $$f(x) = \delta(x) \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = 1 \tag{25}$$
- Gaußsche Funktion $(\sigma \in \mathbb{R}^*)$: $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{-\sigma^2k^2/2} \tag{26}$$
- Lorentz[(h)]-Verteilung $(a \in \mathbb{R}_+^*)$: $$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2 + a^2} \quad \leftrightsquigarrow \quad \tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{-a|k|}. \tag{27}$$

Bemerkungen:

∗ Mit den hier angegebenen Vorfaktoren sind die Gaußsche Funktion $f(x)$ der Gl. (26) und die Lorentz-Verteilung der Gl. (27) auf 1 normiert.

∗ Für die Gaußsche Funktion $f(x)$ der Gl (26) gelten
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\frac{\sigma^2}{2},$$
woraus $\Delta x = \sigma/\sqrt{2}$ folgt.[(3)] Wiederum führen
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sigma^2}$$
zu $\Delta k = 1/\sigma\sqrt{2}$,[(3)] wobei die erste Gleichung den Satz von Parseval (13) ausdrückt. Insgesamt gilt somit $(\Delta x)(\Delta k) = \frac{1}{2}$, unabhängig vom Wert von σ, entsprechend dem Gleichheitsfall der Unschärferelation (18)

∗ Für die Lorentz-Verteilung $f(x)$ der Gl (27) gelten
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi a} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{a}{2\pi},$$
was $\Delta x = a$ ergibt.[(3)] Wiederum findet man
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = \frac{1}{8\pi a^3},$$
d.h.[(3)] $\Delta k = 1/a$ und daher $(\Delta x)(\Delta k) = 1$, unabhängig von a und in Übereinstimmung mit der Unschärferelation (18)

[(3)] Da die Funktionen $f(x)$ und $\tilde{f}(k)$ gerade sind, gilt das auch für deren jeweiligen Betragsquadrate, woraus $\langle x\rangle = 0$ und $\langle k\rangle = 0$ folgen.