Die δ-Distribution

Physiker verwenden in ihren Modellierungen oft punktförmige Objekte, wie Punktmassen oder Punktladungen. Zur Beschreibung solcher Objekte wurde die δ-Distribution eingeführt, die in diesem Anhang samt einiger ihrer Eigenschaften kurz dargestellt wird.

1 Definition und erste Ergebnisse

1.1 Definition

Definition: Als *Testfunktion* auf einem Raum Ω wird eine Funktion T bezeichnet, die einerseits glatt — i.e. beliebig oft differenzierbar — ist, und andererseits einen kompakten Träger besitzt — i.e. T verschwindet außerhalb eines beschränkten Gebiets von Ω.

Sei $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ der Raum der Testfunktionen auf Ω. In diesem und dem folgenden Abschnitt ist $\Omega = \mathbb{R}$, in Abschn. 3 ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$.

Definition: Die *δ-Distribution*, auch *Dirac*[(a)]*-Distribution* oder *Dirac-δ* genannt,[(1)] ist eine stetige lineare Abbildung auf $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, die einer Testfunktion T ihren Wert $T(0)$ zuordnet.

> Um die Stetigkeit der δ-Distribution genauer diskutieren zu können, soll man einen Abstand auf dem Funktionenraum $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ einführen.

Für die Operation der δ-Distribution auf eine Testfunktion T existieren mehrere Notationen: Mathematiker schreiben entweder $\langle\delta, T\rangle = T(0)$ oder, selten, $\delta[T] = T(0)$. Physiker verwenden aber die Schreibweise

$$\int T(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = T(0), \tag{1}$$

wobei das Integrationszeichen ohne Grenzen eine Integration von $-\infty$ bis ∞ bedeuten soll. Diese Notation wird hiernach weiter motiviert, muss aber mit Vorbehalt genommen werden.

> Insbesondere handelt es sich beim Integrationszeichen nicht um ein (Lebesgue-)Integral mit dem üblichen Integrationsmaß, wie bei der Integration von Funktionen.

[(1)] oder noch, fehlerhaft, δ- bzw. Dirac-Funktion, da es sich nicht um eine „Funktion“ handelt.

[(a)] P. A. M. Dirac, 1902–1984

Bemerkungen:

∗ Die δ-Distribution ist ein Beispiel von *Distribution*(!), i.e. von einem stetigen linearen Funktional auf einem Raum von Testfunktionen, das den üblichen Begriff einer Funktion verallgemeinert — weshalb Distributionen auch als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet werden.

∗ Die Beschränkung auf (Test)Funktionen mit einem kompakten Träger kann aufgehoben werden.

∗ Die mithilfe einer δ-Distribution modellierten physikalischen Größen sind meistens Verteilungen, die als Gewicht in Integralen dienen, was eine erste Motivation die Schreibweise (1) gibt.
Wichtig dabei ist, dass wenn die Variable x eine physikalische Dimension X hat, dann hat $\delta(x)$ die Dimension X^{-1}, so dass $\delta(x)\,\mathrm{d}x$ dimensionslos ist.

1.2 Erste Eigenschaften

Definitionsgemäß ist die δ-Distribution linear: gegeben zwei beliebige Testfunktionen T_1, T_2 und zwei Zahlen λ_1, λ_2, gilt erfüllt die Beziehung $\langle\delta, \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2\rangle = \lambda_1\langle\delta, T_1\rangle + \lambda_2\langle\delta, T_2\rangle$, i.e. mit der Notation der Physiker

$$\int \big[\lambda_1 T_1(x) + \lambda_2 T_2(x)\big]\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int T_1(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int T_2(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Schließlich ist dies noch gleich $\lambda_1 T_1(0) + \lambda_2 T_2(0)$. Diese Eigenschaft ist eine der Motivationen hinter der Schreibweise (1), denn sie gilt für das übliche Integral von Funktionen.

Unter Verwendung der Integralschreibweise sieht auch die folgende *Faltungseigenschaft* trivial aus. Sei $\xi \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$\boxed{\int T(x)\delta(x-\xi)\,\mathrm{d}x = T(\xi).} \tag{3}$$

Die unterliegende mathematische Konstruktion ist etwa aufwändig: dabei wird eine *translatierte δ-Distribution* $\delta_{(\xi)}$ definiert, die auf eine Testfunktion gemäß $\langle\delta_{(\xi)}, T\rangle = T(\xi)$ operiert. Dann gilt symbolisch $\langle\delta_{(\xi)}(x), T(x)\rangle \equiv \langle\delta(x), T(x+\xi)\rangle \equiv \langle\delta(x-\xi), T(x)\rangle$, wobei die letzte Gleichung als Definition von $\delta(x-\xi)$ zu betrachten ist.

Wird die „definierende“ Beziehung (1) auf $T(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ angewandt — wobei es sich natürlich nicht um eine Testfunktion von $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ handelt —, so ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4a}$$

Diese Gleichung sieht wie eine Formel für die Fourier[(b)]-Transformation der δ-Distribution aus, und die entsprechende Rücktransformation lautet

$$\boxed{\delta(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}.} \tag{4b}$$

Diese Formel stellt die sog. *Fourier-Darstellung* der δ-Distribution dar.

Wieder lassen sich diese Ergebnisse mathematisch korrekt begründen, indem die herkömmliche Fourier-Transformation auf Distributionen verallgemeinert wird.

1.3 Darstellungen der δ-Distribution

Die δ-Distribution lässt sich als Grenzwert einer Funktionenfolge darstellen, i.e. symbolisch

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x), \tag{5a}$$

[(b)] J. Fourier, 1768–1830

wobei δ_ε eine (integrierbare) Funktion im üblichen Sinn ist, die von einem reellen Parameter $\varepsilon > 0$ kontinuierlich abhängt. Dabei bedeutet der obige Grenzwert

$$\int f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int f(x)\delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \tag{5b}$$

für jede Funktion f mit bestimmten Eigenschaften — z.B. jede Testfunktion von $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.[2] Dann bilden die Funktionen δ_ε eine *Darstellung der δ-Distribution*.

Da δ_ε eine Funktion ist, ist das Integral auf der rechten Seite von Gl. (5b) ein übliches (Lebesgue)-Integral. Somit wird das Verwenden der Integralnotation für die Operation auf f der δ-Distribution, auf der linken Seite von Gl. (5b), weiter motiviert.

Die Funktionen δ_ε werden oft so gewählt, dass sie die folgenden Eigenschaften haben:

- sie haben einen Peak bei $x = 0$, der mit abnehmendem ε schmaler und höher wird;
- für jeden $x \neq 0$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = 0$;
- $\int \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Man prüft leicht nach, dass die hiernach angegebenen Beispiele diese Eigenschaften erfüllen.

1.3 a Skalierte Rechteckfunktionen

Eine einfache Darstellung, jedoch durch unstetige Funktionen, ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{für } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

1.3 b Skalierte Dreieckfunktionen

Eine stetige, aber nicht überall differenzierbare Darstellung, ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{7}$$

1.3 c Exponentialfunktionen

Ebenfalls nicht überall differenzierbar — diesmal liegt das Problem in $x = 0$ — ist die Darstellung durch Exponentialfunktionen

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{e}^{-|x|/\varepsilon}. \tag{8}$$

1.3 d Gaußsche Verteilungen

Gaußsche Verteilungen liefern eine unendlich differenzierbare Darstellung:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2\varepsilon^2}. \tag{9}$$

1.3 e Lorentz-Verteilungen

Mithilfe von Lorentz[c]-Verteilungen ergibt sich die Darstellung:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\frac{1}{x - \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{10}$$

[2] Je nach der gewählten Klasse von Funktionen f können die Funktionen δ_ε eine passende Darstellung bilden oder nicht.

[c] H. A. Lorentz, 1853–1926

1.3 f Kardinalsinus

Ebenfalls nützlich ist die Darstellung

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} & \text{für } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\pi\varepsilon} & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{11}$$

wobei die Definition des Zahlenwerts in $x = 0$ die Stetigkeit der Funktion δ_ε gewährleistet. Für $x \neq 0$ gilt nämlich

$$\delta_\varepsilon(x) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \frac{\mathrm{d}k}{2\pi},$$

und der Limes $\epsilon \to 0$ gibt die Fourier-Darstellung (4b) wieder.

1.4 Heaviside-Funktion

Definition: Die *Heaviside-*[d] oder *Stufenfunktion* wird durch

$$\Theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

definiert, wobei der Wert für $x = 0$ irrelevant ist.

Für diese Funktion kann man, genau wie für die δ-Distribution, Darstellungen Θ_ε finden, mit

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Theta_\varepsilon(x) \tag{13a}$$

oder genauer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Theta_\varepsilon(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Theta(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{13b}$$

für jede passende Funktion f, wobei die zweite Gleichung aus der Definition der Heaviside-Funktion folgt.

Dann liefert die Ableitung jeder differenzierbaren Darstellung Θ_ε der Heaviside-Funktion eine Darstellung δ_ε der δ-Distribution: symbolisch schreibt man $\Theta'_\varepsilon = \delta_\varepsilon$ oder noch

$$\Theta'(x) = \delta(x). \tag{14}$$

Dabei handelt es sich um eine Ableitung „im Sinne der Distributionen".

Beispiele von Darstellungen der Heaviside-Funktion sind

$$\Theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\varepsilon \\ \dfrac{x+\varepsilon}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{für } x > \varepsilon, \end{cases} \tag{15}$$

entsprechend der Darstellung (6) der δ-Distribution, oder

$$\Theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{16}$$

deren Ableitung die Darstellung (10) der δ-Distribution wiedergibt.

2 Rechenregeln

Neben den schon in § 1.2 angegebenen Eigenschaften gelten noch weitere, die hiernach meistens ohne expliziten Beweis[3] aufgelistet werden.

[3] Die interessierte Leserin kann die verschiedenen Gleichungen relativ leicht prüfen, indem sie die δ-Distribution als Grenzwert einer Darstellung schreibt.

[d] O. Heaviside, 1850–1925

2.1 Skalierung

Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $a \in \mathbb{C}$); dann gilt eine Skalierungseigenschaft, die sich symbolisch als

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)} \tag{17a}$$

schreiben lässt, was eigentlich

$$\int T(x)\delta(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}T(0), \tag{17b}$$

für jede Testfunktion T bedeutet.

Für eine Darstellung δ_ε folgt die entsprechende Gleichung einfach aus einer Substitution der Integrationsvariablen.

Insbesondere gilt für $a = -1$

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{18}$$

i.e. die δ-Distribution ist gerade.

2.2 Ableitung

Man definiert eine Distribution δ', die sich bezüglich der δ-Distribution wie die Ableitung f' bezüglich einer (Stamm)Funktion f verhält.

Dann gilt für jede Testfunktion T

$$\boxed{\int T(x)\delta'(x)\,\mathrm{d}x = -T'(0).} \tag{19}$$

Nimmt man die Integralschreibweise ernst und führt man eine partielle Integration durch, so ergibt sich

$$\int T(x)\delta'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[T(x)\delta(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int T'(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x,$$

woraus das gesuchte Ergebnis „folgt“, denn T verschwindet im Unendlichen. □

Auf ähnlicher Weise wird eine zweite Ableitung δ'' definiert, für die

$$\int T(x)\delta''(x)\,\mathrm{d}x = T''(0) \tag{20}$$

gilt, und so weiter für die höheren Ableitungen.

2.3 Substitution der Integrationsvariablen

Sei f eine differenzierbare reelle Funktion auf $\mathbb{R}$, mit einer einzigen Nullstelle in x_0: $f(x_0) = 0$, wo ihre Ableitung nicht Null ist, $f'(x_0) \neq 0$. Dann gilt für die Verkettung von der δ-Distribution mit f

$$\delta\big(f(x)\big) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0), \tag{21a}$$

entsprechend für jede Testfunktion T

$$\int T(x)\delta\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|f'(x_0)|}\int T(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|f'(x_0)|}T(x_0). \tag{21b}$$

Dank den Annahmen über f gilt in der Nachbarschaft von x_0

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}\big((x - x_0)^2\big) = f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}\big((x - x_0)^2\big).$$

Das Ergebnis folgt dann aus der Skalierungseigenschaft (17). □

Für eine Funktion f mit mehreren Nullstellen x_i, in denen die Ableitung f' nicht verschwindet, gilt die Verallgemeinerung

$$\boxed{\delta\big(f(x)\big) = \sum_{\text{Nullstellen } x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i).} \tag{22}$$

Beispiel 1: Sei $f(x) = \arctan x$, mit einer einzigen Nullstelle in $x_0 = 0$, während die Ableitung $f'(x) = 1/(1+x^2)$ nirgendwo verschwindet. Da $f'(0) = 1$ lautet wird Gl. (21a) zu

$$\delta(\arctan x) = \delta(x).$$

Beispiel 2: Sei $f(x) = x^2 - a^2$ mit $a \in \mathbb{R}_+$; f hat zwei Nullstellen in $-a$ und a. Aus $f'(x) = 2x$ folgen $f'(-a) = -2a$, $f'(a) = 2a$, und somit $|f'(-a)| = |f'(a)| = 2a$. Somit ergibt Gl. (22)

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\big[\delta(x-a) + \delta(x+a)\big]. \tag{23}$$

Bemerkungen:

$*$ Falls eine Funktion f eine Nullstelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ hat, kann man die Funktion oft leicht „verformen", um statt nur x_0 zwei (oder mehr) Nullstellen zu erhalten, in denen die Ableitung nicht verschwindet.
Beispielsweise würde man $\delta(x^2)$ durch $\delta(x^2 - \eta)$ ersetzen, den letzteren Ausdruck mithilfe der Gl. (23) umschreiben, die daraus folgenden Berechnungen durchführen, und schließlich den Limes $\eta \to 0$ betrachten... und hoffen, dass das Ergebnis sinnvoll ist!

$*$ Wie in Gl. (22) implizit ist, darf man δ-Distributionen problemlos miteinander addieren. Mit Produkten von δ-Distributionen muss man aber vorsichtig sein: insbesondere ist das Produkt von $\delta(x)$ mit sich selbst nicht definiert. Dagegen dürfen δ-Distributionen von unterschiedlichen Argumenten, wie z.B. $\delta(x)\delta(y)$ oder $\delta(x)\delta(y-x)$, miteinander multipliziert werden. Dann muss aber über alle Argumente integriert werden, um eine Zahl zu erhalten, wie im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutiert wird.

3 Mehrdimensionale δ-Distributionen

Seien $x^1, x^2, \ldots, x^n$ unabhängige Variablen, die in einen n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{x}$ zusammengefasst werden. Betrachtet man Testfunktionen $T(\boldsymbol{x})$ dieser n Variablen, so kann man eine n-dimensionale δ-Distribution, die oft mit $\delta^{(n)}$ bezeichnet wird,[4] gemäß

$$\int T(\boldsymbol{x})\,\delta^{(n)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{0}), \tag{24}$$

wobei das Integral über $\mathbb{R}^n$ ist. Anders gesagt gilt

$$\delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \equiv \delta(x^1)\cdots\delta(x^n) = \prod_{k=1}^{n} \delta(x^k). \tag{25}$$

Die für die eindimensionale δ-Distribution angegebenen Eigenschaften lassen sich einfach auf $\delta^{(n)}$ verallgemeinern. Beispielsweise gelten die Faltungseigenschaft

$$\boxed{\int T(\boldsymbol{x})\,\delta^{(n)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{\xi}),} \tag{26}$$

[4] Dies sollte man nicht mit der n-ten Ableitung von der eindimensionalen δ-Distribution verwechseln — in der Physik treten höhere Ableitungen von δ aber extrem selten.

wobei $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, sowie die Fourier-Darstellung

$$\boxed{\delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}} \tag{27}$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k^1x^1 + \cdots + k^nx^n$.

Die Skalierungseigenschaft lautet jetzt

$$\boxed{\delta^{(n)}(a\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|a|^n}\delta^{(n)}(\boldsymbol{x})} \tag{28}$$

für $a \in \mathbb{R}$, und kann erweitert werden: wenn $\mathscr{A}$ eine invertierbare $n\times n$-Matrix ist, dann ist

$$\boxed{\delta^{(n)}(\mathscr{A}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\det \mathscr{A}|}\delta^{(n)}(\boldsymbol{x}).} \tag{29}$$

Ähnlich gilt im Fall einer Variablenänderung $(x^1, \dots, x^n) \to (y^1, \dots, y^n)$ bzw. $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$

$$\delta^{(n)}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det J|}\delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

mit J der Jacobi[(e)]-Matrix der Substitution, mit Elementen $\partial y^i/\partial x^j$. Aus dieser letzten Gleichung lässt sich die Verallgemeinerung der Formel (22) ableiten.

Literatur

- Gelfand & Shilov, *Verallgemeinerte Funktionen. Band 1*, Kap. I.
- Schwartz, *Mathematische Methoden der Physik. Band 1*, Kap. II.

[(e)] C. G. Jacobi, 1804–1851