Präsenzübung Nr. 7

Aufgabe 25. Spin und Parität

Berechnen Sie Spin und Parität $J^{\mathsf{P}}_{\text{Kern}}$ der folgenden Kerne: ${}^{30}_{14}\text{Si}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{41}_{20}\text{Ca}$, ${}^{59}_{27}\text{Co}$.

Aufgabe 26. Kernspinresonanz (2)

(Fortsetzung der Aufgabe **24**)

Ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ sei in einem Magnetfeld, das sich schreiben lässt als Überlagerung eines festen Magnetfeldes $\vec{\mathscr{B}}_0$ entlang der z-Achse und eines zweiten schwächeren zeitabhängigen Magnetfeldes $\vec{\mathscr{B}}_1$, das in der (x,y)-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \left(\vec{\mathscr{B}}_0 + \vec{\mathscr{B}}_1(t)\right) = -\mu_0 \mathscr{B}_0 \hat{\sigma}_z - \mu_0 \mathscr{B}_1 \cos(\omega t)\, \hat{\sigma}_x - \mu_0 \mathscr{B}_1 \sin(\omega t)\, \hat{\sigma}_y. \tag{1}$$

Die Schrödinger-Gleichung liefert für die zeitliche Entwicklung eines auf 1 normierten Zustands $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ die gekoppelten differentiellen Gleichungen

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}a_+}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0}{2}\, a_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} a_-(t) \\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}a_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} a_+(t) - \dfrac{\omega_0}{2}\, a_-(t), \end{cases} \tag{2}$$

wobei $\omega_0 \equiv -\dfrac{2\mu_0 \mathscr{B}_0}{\hbar}$ und $\omega_1 \equiv -\dfrac{2\mu_0 \mathscr{B}_1}{\hbar}$.

a) Zeigen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $a_\pm(t)$ durch $b_\pm(t) \equiv \exp(\pm \mathrm{i}\omega t/2)\, a_\pm(t)$ zu den einfacheren folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}b_+}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega - \omega_0}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, b_-(t) \\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}b_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega - \omega_0}{2}\, b_-(t) \end{cases}$$

führt. Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_\pm}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2. \tag{3}$$

b) Der Spin sei zu $t = 0$ im Zustand $|+\rangle$, was $b_-(0) = a_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (3)? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ zur Zeit t zu finden, lautet

$$\mathcal{P}_{+\to-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω: Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des Übergangs $|+\rangle \to |-\rangle$ eine präzise Bestimmung der *Larmor-Frequenz* ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld $\mathscr{B}_0$) des gyromagnetischen Faktors γ?

Mithilfe dieses Verfahrens verbesserte Isidor Rabi die Genauigkeit der Messungen von γ-Werten um einen Faktor $\approx 10^3$! Dann kamen Felix Bloch & Edward Purcell...

c) Wenn Sie Zeit haben können Sie noch die Bewegungsgleichungen (2) herleiten! Was ist die physikalische Deutung der Substitution der Funktionen $a_\pm$ durch die Funktionen $b_\pm$?