Übung Nr. 7

Diskussionsthemen:

- Welche experimentellen Beobachtungen führen zur Idee eines Schalenmodells des Atomkerns?
- Wie werden die Energieniveaus eines Nukleons in einem Kastenpotential hergeleitet?
- Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 23. Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns

Nach Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung ergibt sich für die ersten Schalen in einem realistischen Potentialtopf das Termschema

$$1\mathrm{s}_{1/2}, 1\mathrm{p}_{3/2}, 1\mathrm{p}_{1/2}, 1\mathrm{d}_{5/2}, 2\mathrm{s}_{1/2}, 1\mathrm{d}_{3/2}, 1\mathrm{f}_{7/2}, 2\mathrm{p}_{3/2}, 1\mathrm{f}_{5/2}, 2\mathrm{p}_{1/2}, 1\mathrm{g}_{9/2}, \ldots \tag{1}$$

Dann sind bei Protonen bzw. Neutronen die zwei nächsten Schalen $1\mathrm{g}_{7/2}$, $2\mathrm{d}_{5/2}$ bzw. $2\mathrm{d}_{5/2}$, $1\mathrm{g}_{7/2}$. Geben Sie die Paritäten und Entartungsgrade der verschiedenen Niveaus an.

Aufgabe 24. Kernspinresonanz: Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\vec{\mu}}$ und der Spin-Operator $\hat{\vec{S}}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\vec{\mu}} = \gamma \hat{\vec{S}} = \mu_0 \hat{\vec{\sigma}},$$

wobei γ das sog. gyromagnetische Verhältnis und $\mu_0 \equiv \gamma\hbar/2$ ist. Wir wollen hier und in einer späteren Aufgabe das durch Isidor Rabi eingeführte Prinzip der Messung von γ beschreiben.

Die übliche Darstellung der Pauli-Matrizen ist

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Eigenzustände $|+\rangle$, $|-\rangle$ (in der Diracschen Bezeichnungsweise) der Operatoren $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$ bilden gemeinsam eine Basis der Spinzustände; diese Eigenzustände genügen den Gleichungen

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{\vec{S}}^2|\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\pm\rangle$$

sowie

$$\hat{S}_x|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{S}_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_y|+\rangle = \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{S}_y|-\rangle = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}|+\rangle.$$

In dieser Aufgabe betrachten wir die Präzession eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{\mathscr{B}}_0$ entlang der z-Achse. Der entsprechende Hamilton-Operator ist[1]

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mathscr{B}}_0 = -\mu_0 \mathscr{B}_0 \hat{\sigma}_z. \tag{3}$$

Sei $|\psi(t)\rangle$ ein beliebiger Zustand, der bei $t = 0$ die Bedingung $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ erfüllt, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Die spätere zeitliche Entwicklung des Zustands wird durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator (3) gegeben, so dass

$$|\psi(t)\rangle = \alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t/2}|+\rangle + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t/2}|-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathscr{B}_0}{\hbar}. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ des magnetischen Dipolmoments im Zustand $|\psi(t)\rangle$ lautet

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = 2\mu_0 \,\mathrm{Re}\,(\alpha^* \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle \hat{\mu}_y \rangle = 2\mu_0 \,\mathrm{Im}\,(\alpha^* \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle \hat{\mu}_z \rangle = \mu_0 \,(|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

[1] Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

Schreiben Sie die x- bzw. y-Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0\,\alpha^*\beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projizierung von $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$ auf die (x, y)-Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$?