Präsenzübung Nr. 6

Aufgabe 22. Teilchen in einem endlichen Kastenpotential

i. Präambel Bekannterweise kann ein Zwei-Körper-Problem mit zentraler Kraft nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse $m_{\text{red.}}$ als Ein-Körper-Problem beschrieben werden. Wie lautet aber $m_{\text{red.}}$ in Abhängigkeit von den Massen m_1, m_2 der zwei Körper? Was ergibt sich falls $m_1 = m_2 \equiv m_N$?

ii. Ein Teilchen mit Masse $m_N/2$ sei in einem kugelsymmetrischen Kastenpotential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 \text{ für } |\vec{r}| < R_0 \\ 0 \text{ für } |\vec{r}| > R_0, \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$. Mit einer passenden Wahl der Parameter V_0 und R_0 kann es nur einen einzigen gebundenen Zustand geben. Sei $-E_B$ mit $E_B > 0$ die Energie dieses Zustands.

a) Bei verschwindendem Bahndrehimpuls vereinfacht sich das Problem zu einem eindimensionalen radialen Problem. Sei $R(r)$ der radiale Anteil der Wellenfunktion mit $r = |\vec{r}|$. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung für $u(r) \equiv rR(r)$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} + k^2u(r) = 0 \;\text{ für } r < R_0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} - K^2u(r) = 0 \;\text{ für } r > R_0 \tag{1}$$

führt, wobei k und K von m_N, $\hbar$, V_0 und E_B abhängen.

b) Für die Lösung dieser Gleichungen macht man den Ansatz $u(r) = A\sin(kr)$ für $r < R_0$ [zusätzliche Frage: warum nicht mit cos?] und $u(r) = B\,\mathrm{e}^{-K(r-R_0)}$ für $r > R_0$. Prüfen Sie, dass die Stetigkeit in $r = R_0$ dieser Lösung und deren Ableitung zu den Bedingungen $A\sin(kR_0) = B$ und $k\cot(kR_0) = -K$ führt, die wiederum die Bedingung

$$k^2A^2 = (k^2 + K^2)B^2 \tag{2}$$

geben.

c) Die Lösung der Schrödinger-Gleichung soll auf 1 normiert werden. Zeigen Sie, dass daraus die folgende Bedingung folgt [einige wichtigen „Details“ sollten Sie dabei nicht vergessen!]

$$\frac{A^2}{2k}[2kR_0 - \sin(2kR_0)] + \frac{B^2}{K} = \frac{1}{2\pi}. \tag{3}$$

d) Löst man die Gleichungen (2)–(3) nach A und B unter Berücksichtigung von $K \ll k$, so findet man

$$A \simeq B \simeq \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-KR_0/2}$$

und daher $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-KR_0/2}\sin(kr)$ für $r < R_0$ und $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{K(R_0/2-r)}$ für $r > R_0$.

Sei $m_N = 939\,\mathrm{MeV}/c^2$, $V_0 = 38{,}5\,\mathrm{MeV}$, $E_B = 2{,}225\,\mathrm{MeV}$. Zeigen Sie, dass diese numerischen Werte zu $k = 0{,}938\,\mathrm{fm}^{-1}$ und $K = 0{,}232\,\mathrm{fm}^{-1}$ führen. Sei dazu $R_0 = 1{,}93\,\mathrm{fm}$. Plotten Sie $u(r)$ und berechnen Sie (Mathematica?) den mit der Wellenfunktion quadratisch gemittelten Radius $\sqrt{\langle r^2\rangle}$.

e) Schauen Sie sich die oben angegebenen Werte von m_N und E_B an. Welchen Atomkern haben Sie gerade modelliert?