

Übung Nr. 6

Diskussionsthemen:

- Frischen Sie Ihre Kenntnisse in Quantenmechanik auf. (Schrödinger-Gl. — insbesondere in 3D: Bahndrehimpulsoperator! — und ihre Lösung; Spin & Drehimpulse und ihre Addition)
- (Besprechung am 25.-26. November) Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 20. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der dreidimensionale (3D) harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ beschrieben.

- i. Betrachten Sie den der kinetischen Energie entsprechenden Operator für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten.
 - a) Machen Sie einen Separationsansatz für die Wellenfunktion und zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für drei eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Folgern Sie daraus, dass sich die Energieniveaus des 3D-Oszillators durch drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 ausdrücken lassen.
 - b) Sei $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$. Wie lautet der Entartungsgrad des Niveaus mit Energie $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$?
- ii. Löst man das Problem des 3D-Oszillators in Kugelkoordinaten (was wir hier nicht tun wollen), so findet man für die Energieniveaus:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left[2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right],$$

wobei $n = 1, 2, \dots$ (Hauptquantenzahl), und $\ell = 0, 1, \dots$ (Bahndrehimpulsquantenzahl).

- a) Welchen Entartungsgrad weisen die Energieniveaus auf? Berechnen Sie diesen explizit für die ersten 6 Energieniveaus.
 - b) Welche Parität haben die Energieniveaus jeweils?
- iii. Geben Sie die Energieniveaus für das Problem eines Teilchens der Masse m im Potentialtopf

$$V(\vec{r}) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

an, wobei $r = |\vec{r}|$ und $V_0 > 0$.

Aufgabe 21. (Wiederholung QM) Spin-System

Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-1-Teilchen mit Spins \vec{S} und \vec{S}' sei

$$\hat{H} = A + B \hat{S} \cdot \hat{S}' + C(\hat{S}_3 + \hat{S}'_3),$$

mit reellen Konstanten A, B, C . Finden Sie die Energie-Eigenwerte des Systems. Gibt es Entartung? Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Menge von Operatoren, die mit \hat{H} vertauschen.