

Übung Nr. 5

Diskussionsthema: Fermi-Gas-Modell des Atomkerns

Aufgabe 16. Typische Skalen der Kernphysik

Der Radius eines Kerns sei durch $R = 1,3A^{1/3}$ fm gegeben.

i. Zeitskala

Berechnen Sie die Zeit, die ein Nukleon mit kinetischer Energie gleich der Fermi-Energie $\varepsilon_F \approx 40$ MeV benötigt, um einen ^{208}Pb -Kern zu durchqueren.

ii. Energie- und Impulsskala

Schätzen Sie unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation den typischen Impuls eines Nukleons in einem ^{208}Pb -Kern. Was ist die zugehörige typische Energie? Vergleichen Sie mit den im Fermi-Modell erwähnten Werten.

Aufgabe 17. Neutronenstern als Fermi-Gas

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa $10 M_\odot$ zu Neutronensternen. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines Kerns ($n_\infty = 0,17$ Nukleonen/fm³) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen (d.h. kinetische Energie \ll Massenenergie) Neutronen bei Null-Temperatur beschrieben werden kann.

Es sei $\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{V}}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n}$ die zugehörige Fermi-Energie mit der Zahl \mathcal{N}_n von Neutronen.

ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R . Diese besteht aus zwei Beiträgen: der kinetischen Energie (benutzen Sie hier die in der Vorlesung angegebene durchschnittliche kinetische Energie pro Neutron) und der Gravitationsenergie. Leiten Sie die Gravitationsenergie E_G analog zur Betrachtung in der Vorlesung bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.

iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_{eq} , für den die Energie $E(R)$ minimal wird.

iv. Berechnen Sie den Wert dieses Radius sowie die entsprechende Teilchendichte für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4 M_\odot$ ($1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg).

Aufgabe 18. Kern als Einzel- oder Zweikomponenten-Fermi-Gas

Berechnen Sie die Gesamtenergie (ohne Ruhemasse) des Atomkerns $^{107}_{47}\text{Ag}$, einerseits unter der Annahme, dass Protonen und Neutronen voneinander verschieden sind, andererseits dass sie nicht verschieden sind, und vergleichen Sie beide Resultate. Berechnen Sie auch explizit $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_N$. Wie gut ist die in der Vorlesung betrachtete Entwicklung?