Übungen Nr. 13 & 14

Diskussionsthemen:

– Wie wird die Kettenreaktion in einem Spaltreaktor gesteuert?

– Fassen Sie zusammen, wie die verschiedenen Arten von „Strahlung“ ihre Energie in der Materie verlieren. Was bezeichnet man unter Bragg-Peak?

Aufgabe 47. Verzögerte Neutronen

In der Vorlesung wurde unter Vernachlässigung verzögerter Neutronen für die Neutronendichte $n_n(t)$ folgende Relation aufgestellt:

$$\frac{\mathrm{d}n_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\nu_p q - 1}{t_p}\, n_n(t), \tag{1}$$

wobei ν_p die Zahl prompter Neutronen und t_p die Zykluszeit ist — d.h. die mittlere Dauer, bis prompte Neutronen eine Spaltung induzieren —, während q die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass bei einem Stoß eine Kernspaltung erfolgt.

i. Unter der Annahme, dass bei genau einer Art von Spaltung verzögerte Neutronen produziert werden, leiten Sie folgende Beziehung her:

$$\frac{\mathrm{d}n_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\nu_p q - 1}{t_p}\, n_n(t) + \frac{\nu_v q}{t_p} \int_{-\infty}^{t} \frac{n_n(t')\, \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau_\beta}}{\tau_\beta}\, \mathrm{d}t', \tag{2}$$

wobei τ_β die mittlere Lebensdauer der Spaltfragmente ist, die verzögerte Neutronen produzieren und ν_v die Zahl verzögerter Neutronen ist.

ii. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (2) $n_n(t) = n_n(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ ist und bestimmen Sie λ.

iii. Zeigen Sie, dass für $t_p = 10^{-4}$ s, $\nu_p q - 1 = 10^{-4}$ und in der Abwesenheit von verzögerten Neutronen die Neutronendichte exponentiell mit einer Zeitskala von 1 Sekunde wächst.

iv. Zeigen Sie, dass für $t_p = 10^{-4}$ s, $\tau_\beta = 10$ s, $\nu_p q - 1 = -0,0078$, $(\nu_p + \nu_v)q - 1 = 10^{-4}$ (entsprechend $\nu_p = 2,5$ und $\nu_v = 0,02$) die Neutronendichte exponentiell mit einer Zeitskala von ca. 13 Minuten wächst.

Aufgabe 48. Kernfusion (1)

Betrachten Sie die Fusionsreaktion $p + {}^2\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \gamma + 5,5\,\mathrm{MeV}$, wobei Proton und Deuteron (^{2}H-Kern) als ruhend angenommen werden sollen.

i) Welche kinetische Energie hat der Heliumkern?

ii) Dieser Prozess findet in der Sonne statt, bei einer Temperatur von etwa $1,7 \cdot 10^7$ K. Schätzen Sie daraus ab, wie nahe sich Proton und Deuteron kommen müssen damit die Kerne fusionieren.

Aufgabe 49. Reichweite schwerer geladener Teilchen – Skalierungsgesetz

Sei $R_p(E_{\mathrm{kin},p})$ die Reichweite eines Protons (Masse m_p) mit der kinetischen Energie $E_{\mathrm{kin},p}$ in einem Stück Materie. Zeigen Sie, dass die Reichweite $R_M(E_{\mathrm{kin},M})$ eines Teilchens mit der Masse M, der elektrischen Ladung ze und der kinetischen Energie $E_{\mathrm{kin},M}$, in der gleichen Materie durch

$$R_M(E_{\mathrm{kin},M}) = \frac{M}{z^2 m_p} R_p\left(\frac{m_p}{M} E_{\mathrm{kin},M}\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 50. Energiedosis

Der ^{32}P-Kern ist ein β^--Strahler mit Halbwertszeit 14,3 Tage. Die emittierten Elektronen haben eine maximale Energie von 1,71 MeV und ihre mittlere freie Weglänge in biologischem Gewebe ist etwa 7 mm.

Prüfen Sie, dass eine Quelle von 1 mCi (Millicurie) eine Energiedosis der Ordnung 1 rad pro Sekunde überträgt.

Aufgabe 51. Spaltproduktvergiftung

Bei der Kernspaltung entstehen im Brennstoff viele Spaltprodukte, die selbst radioaktiv sind und durch ihren Zerfall neue Neutronenabsorber erzeugen. Die Spaltprodukte bleiben im Reaktor, sie „vergiften“ ihn. Für die „parasitäre“ Neutronenabsorption ist neben der Häufigkeit vor allem der Absorptionsquerschnitt eines Spaltprodukts entscheidend.

Das zeitliche Verhalten der Konzentration N_i eines direkten Spaltprodukts i ergibt sich aus der vereinfachten Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_i N_{\mathrm{Sp}} \sigma_{\mathrm{Sp}} \Phi - \lambda_i N_i - \sigma_{i,\mathrm{n}} N_i \Phi, \tag{3}$$

mit dem Verzweigungsverhältnis γ_i für die Erzeugung des Spaltprodukts i in einer Spaltung, der Dichte N_{Sp} bzw. dem Spaltungsquerschnitt σ_{Sp} der Spaltkerne, der Neutronenflussdichte Φ, und der Zerfallskonstanten λ_i bzw. dem Neutronenabsorptionswirkungsquerschnitt $\sigma_{i,\mathrm{n}}$ von i.[1]

i. Nehmen Sie an, dass Φ und $N_{\mathrm{Sp}}\sigma_{\mathrm{Sp}}$ zeitunabhängig sind und lösen Sie die Differentialgleichung (3) unter der Nebenbedingung, dass $N_i(t\!=\!0) = 0$. [Tipp: Variation der Konstanten]

ii. Bestimmen Sie die Sättigungszeit t_s, d.h., die Zeitkonstante, die als Inverse des Vorfaktors von t im Exponenten auftritt: sie bestimmt, wie schnell sich die Gleichgewichtskonzentration für die Zahl der Spaltprodukte einstellt. Berechnen Sie t_s für $\sigma_{i,\mathrm{n}} = 10$ b, $\Phi = 3 \cdot 10^{13}$ cm^{-2}s^{-1} und $\tau_i = 1/\lambda_i = 21,21$ a. Vergleichen Sie diese Sättigungszeit mit der typischen Laufzeit eines Reaktors.

iii. Bei sogenannten starken Absorbern sind die Sättigungszeiten dagegen sehr kurz. Ist das stark absorbierende Zerfallsprodukt stabil, so vereinfacht sich der Ausdruck für die Sättigungszeit zu $t_s = 1/\sigma\Phi$: wie folgt dies aus **ii.**?

Ein Beispiel für einen stabilen starken Absorber ist Samarium ^{149}Sm mit $\sigma_{^{149}\mathrm{Sm},\mathrm{n}} = 4,1 \cdot 10^4$ b. Φ sei wie in **ii.** angenommen; nach welcher Zeit ist die Konzentration des Spaltprodukts hier gesättigt?

Aufgabe 52. Kernfusion (2)

Berechnen Sie die Energie, die durch Fusion aller ^{2}H-Kerne zu ^{4}He in 1 kg Schwerwasser erzeugt werden kann. Die Bindungsenergien pro Nukleon B/A sind 1,112 MeV für ^{2}H und 7,074 MeV für ^{4}He.

---

[1] In der Tat sollten auch mindestens zwei weitere mögliche Produktionskanäle des Spaltprodukts i berücksichtigt werden:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_i N_{\mathrm{Sp}} \sigma_{\mathrm{Sp}} \Phi + \lambda_j N_j + \sigma_{k,\mathrm{n}} N_k \Phi - \lambda_i N_i - \sigma_{i,\mathrm{n}} N_i \Phi, \tag{4}$$

wobei der zweite bzw. der dritte Term der Erzeugung von i als Zerfallsprodukt vom Spaltprodukt j bzw. als Produkt der Absorption eines Neutrons durch den Spaltprodukt k entspricht.

Aufgabe 53. Reichweite schwerer geladener Teilchen – eine Taschenformel

Der Energieverlust in Materie (Massendichte ρ von Atomen mit Massenzahl A und Ladungszahl Z) eines schweren Teilchens (Masse M, kinetische Energie E_{kin}, elektrische Ladung ze) kann als

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} \simeq -D\,\frac{Z\rho}{A}\frac{z^2c^2}{v^2}L \tag{5}$$

geschrieben werden, wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens ist und

$$D = 4\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{\mathcal{N}_A}{m_ec^2}$$

mit der Avogadro-Zahl $\mathcal{N}_A$ und der Elektronenmasse m_e. Dazu ist L ein dimensionsloser Faktor, der von der Materie und (leicht) von v abhängt. Sei der Einfachheit halber angenommen, dass L unabhängig von v ist. Zeigen Sie, dass die Reichweite des Teilchens lautet

$$R_M(E_{\text{kin}}) = \frac{A}{Z\rho}\frac{1}{Dz^2L}\frac{E_{\text{kin}}^2}{Mc^2+E_{\text{kin}}}$$

und diskutieren Sie diese Formel.
Zur Erinnerung gilt für ein relativistisches Teilchen $E_{\text{kin}} = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - Mc^2$.