Übung Nr. 12

Diskussionsthemen:

– Fassen Sie für jede der drei häufigsten Zerfallsarten (α-, β- und γ-Emission) zusammen, welche Erhaltungssätze jeweils gelten und welche deren Folgen sind.

– Welche wichtigen Unterschiede existieren zwischen den häufigsten Uran-Isotopen ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ und ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ bezüglich der durch ein Neutron induzierten Spaltung?

Aufgabe 44. Elektrische Dipolstrahlung

In dieser Übung wollen wir einige Elemente der Theorie des γ-Zerfalls ohne Herleitung einführen und untersuchen. Sei $E_\gamma = \hbar\omega$ die Energie des emittierten γ-Quants, und Ψ_i bzw. Ψ_f die Wellenfunktion des Kerns im Anfangs- bzw. Endzustand, d.h. vor bzw. nach dem Zerfall.

Die Zerfallsrate für die Emission elektrischer Dipolstrahlung ($\ell_\gamma = 1$) lautet

$$\frac{1}{\tau_{E1}} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left|\mathscr{M}_{E1}\right|^2, \tag{1}$$

mit einem Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$, das von den Wellenfunktionen Ψ_i, Ψ_f und von den Positionen $\vec{r}_p$ der Protonen im Kern abhängt:[1]

$$\mathscr{M}_{E1} = \int \Psi_\mathrm{f}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\})^* \left(\sum_p \vec{r}_p\right)\Psi_\mathrm{i}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\}) \prod_{p=1}^{Z} \mathrm{d}^3\vec{r}_p \prod_{n=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{r}_n. \tag{2}$$

i. Warum müssen die Wellenfunktionen Ψ_i, Ψ_f entgegengesetzte Paritäten haben?

ii. Das Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$ hat die Dimension einer Länge (warum?), d.h. es kann in fm ausgedrückt werden. Berechnen Sie die Zerfallsrate (in s^{-1}) für ein γ-Quant der Energie $E_\gamma = 1$ MeV unter der Annahme $|\mathscr{M}_{E1}| = 1$ fm.

Aufgabe 45. Bindungsenergie eines deformierten Kerns

In dieser Übung wollen wir die Bindungsenergie eines prolaten (= zigarrenförmigen) Atomkerns anhand der Bethe–Weizsäcker-Formel berechnen und damit die Stabilität von Kernen gegen Deformationen abschätzen.

Der Kern sei durch einen prolaten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = R(1+\varepsilon)$ und $b = R/\sqrt{1+\varepsilon}$ modelliert: sein Volumen ist gegeben durch

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und $\varepsilon \ll 1$ bestimmt die Größe der Deformation. Wie gewöhnlich ist der „Radius“ $R \propto A^{1/3}$.

i. Oberflächenenergie

Berechnen Sie die Oberfläche

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} + \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

des Ellipsoids in Abhängigkeit von R und ε bis einschließlich zur Ordnung ε^2.

Was ist dann die Differenz zwischen der Oberflächenenergie $B_O(\varepsilon)$ des deformierten Kerns und der Oberflächenenergie $B_O(0)$ des sphärischen Kerns mit demselben Volumen? Was bedeutet physikalisch das Vorzeichen dieser Differenz?

[1] Streng genommen ist $\mathscr{M}_{E1}$ — wie die Summe der Ortsvektoren $\vec{r}_p$ — vektoriell! Eigentlich kommt in der Berechnung das Skalarprodukt $\mathscr{M}_{E1}\cdot\vec{\mathscr{E}}_0$ aus diesem Vektor mit einem elektrischen Feld, dessen Betrag proportional zu $(\hbar\omega)^{1/2}$ ist, vor.

ii. Coulomb-Energie

Man kann zeigen, dass die Coulomb-Energie des deformierten Kerns lautet

$$B_C(\varepsilon) = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right].$$

Was ist die Differenz zwischen dieser Coulomb-Energie und jener des kugelförmigen Kerns mit demselben Volumen?

iii. Gesamte Bindungsenergie

Berechnen Sie die gesamte Bindungsenergie $B(\varepsilon)$ des deformierten Atomkerns, sowie die Differenz $\Delta B(\varepsilon) \equiv B(\varepsilon) - B(0)$. Diskutieren Sie, in Abhängigkeit von $\Delta B(\varepsilon)$, wann der Kern stabil gegenüber (kleinen) Deformationen ist. Für welche Werte von Z^2/A wird der Kern instabil? Was kann dann mit dem Kern passieren?