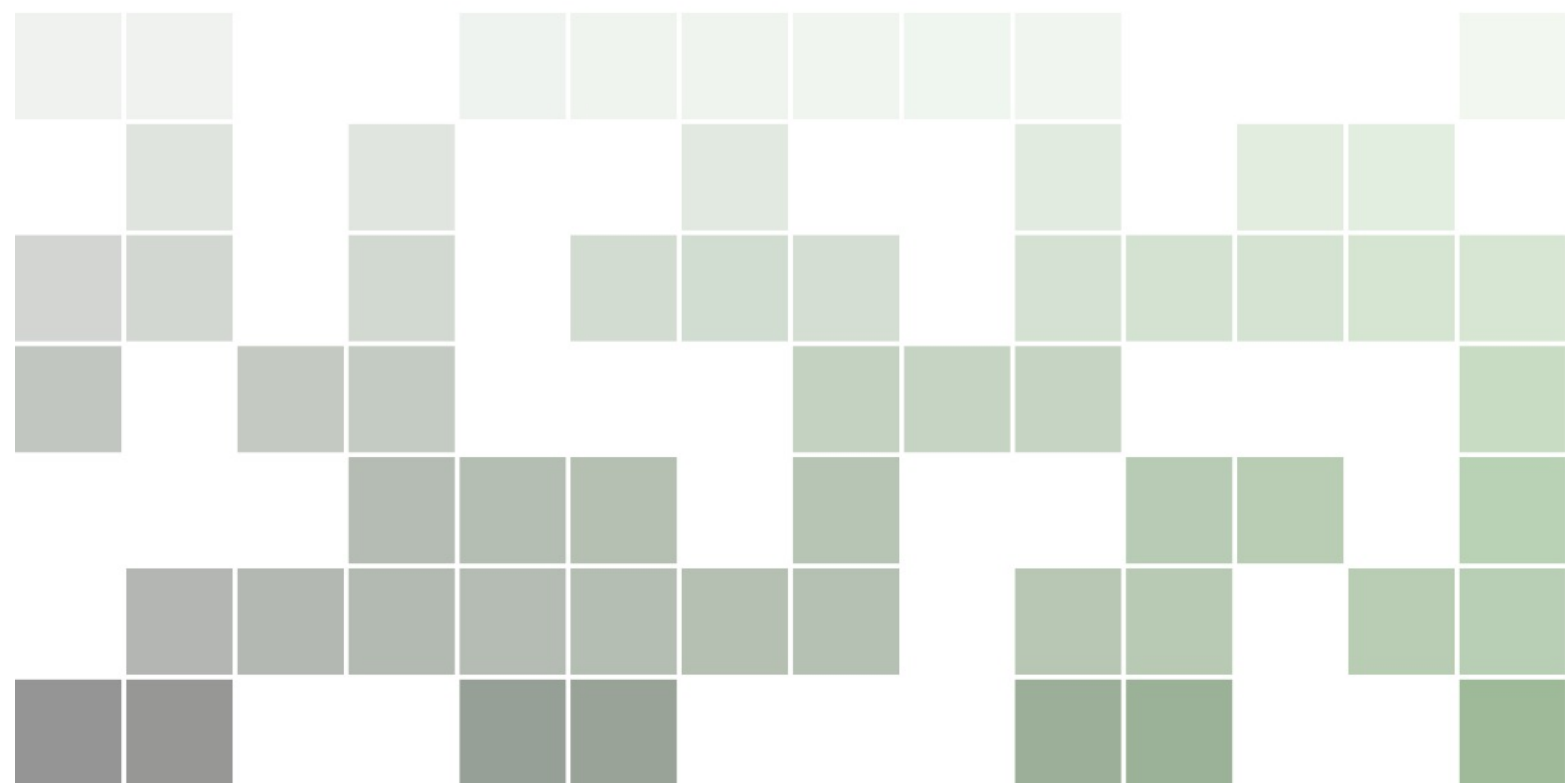


# Elemente der Kernphysik

Nicolas Borghini

Version vom 8. Dezember 2021



Nicolas Borghini

Universität Bielefeld, Fakultät für Physik

Homepage: <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/>

Email: borghini at physik.uni-bielefeld.de

# Vorwort

Die vorliegenden Seiten waren ursprünglich knappe handgeschriebene Notizen, um mir in der Vorlesung zu helfen, nichts wichtiges zu vergessen. Mit der Zeit häuften sich immer mehr Anmerkungen, weshalb ich angefangen habe, die schnell unlesbar werdenden geschmierten Blätter Papier durch eine elektronische Version zu ersetzen. Wieder wurden zusätzliche Ergänzungen oder sogar ganze Paragraphen fast willkürlich hinzugefügt, und das vorläufige Ergebnis ist, was Sie jetzt unter Ihren Augen haben: ein nicht durchdachter Plan; manchmal unterbrochene Sätze; lückenhafte Beweisführungen bzw. Berechnungen — weil die fehlenden Schritte mir klar sind —; nicht-so-schön-aussehende Abbildungen; eine unvollständige Quellenangabe; usw. Vor allem gibt es mit Sicherheit Grammatik- und Rechtschreibfehler,<sup>(\*)</sup> sowie die üblichen unvermeidbaren Tippfehler.<sup>(†)</sup>

Kurz gesagt: die hier gesammelten Kapitel sind kein eigentliches Skript und können keinesfalls ein Lehrbuch und die Teilnahme an einer Vorlesung (und Tutorien) ersetzen.

---

<sup>(\*)</sup> ... die wahrscheinlich mir mehr ärgerlich sind, als Ihnen.

<sup>(†)</sup> Kommentare und Korrekturen sind willkommen!

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorbemerkungen</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>I Eigenschaften von Atomkernen</b> . . . . .	<b>2</b>
I.1 Bausteine von Atomkernen	2
I.2 Größe des Atomkerns	4
I.2.1 Klassische Streutheorie	4
I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns	7
I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen	11
I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen	13
I.3 Masse des Atomkerns	16
I.3.1 Grundlagen der Massenmessung	17
I.3.2 Bindungsenergie	17
I.3.3 Separationsenergien	19
I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns	20
I.4.1 Spin	20
I.4.2 Parität	20
I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente	21
I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne	23
I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik	23
I.5.2 $Z = 1, N = 0$ : Proton ( $p$ )	24
I.5.3 $Z = 0, N = 1$ : Neutron ( $n$ )	25
I.5.4 $Z = 1, N = 1$ : Deuteron ( ${}^2\text{H} \equiv d$ )	25
I.5.5 Schwerere Kerne	25
<b>II Struktur von Kernen. Kernmodelle</b> . . . . .	<b>.27</b>
II.1 Phänomenologie	27
II.2 Tröpfchenmodell	28
II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel	29
II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell	30
II.2.3 Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	33
II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas	33
II.3.1 Ideales Fermi-Gas	34
II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	35
II.3.3 Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas von Protonen und Neutronen	36
II.3.4 Mögliche Verbesserungen des Modells	38
II.4 Schalenmodell des Atomkerns	39
II.4.1 Motivation für ein Schalenmodell	40
II.4.2 Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	42
II.4.3 Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	48
II.4.4 Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	51
II.4.5 Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	55
<b>III Radioaktivität</b> . . . . .	<b>.56</b>
III.1 Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz	57
III.1.1 Zerfallsgesetz	57
III.1.2 Radioaktivität als zufälliger Prozess	59

---

III.1.3	Radioaktive Zerfallsreihen	61
III.2	Natürlich vorkommende Radioisotope	65
III.3	Arten der Radioaktivität	67
III.3.1	Erhaltungsgrößen in Zerfällen	67
III.3.2	$\alpha$ -Zerfall	67
III.3.3	$\beta$ -Zerfall und verwandte Zerfälle	75
III.3.4	$\gamma$ -Zerfall	80
III.3.5	Andere Zerfallsarten	82
	Anhang zum Kapitel III	89
III.A	$\alpha$ -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit	89
<b>IV</b>	<b>Kernenergie</b>	<b>.91</b>
IV.1	Induzierte Spaltung	91
IV.1.1	Grundlagen der induzierten Spaltung	91
IV.1.2	Neutronenquerschnitte	92
IV.1.3	Spaltprodukte	93
IV.2	Kettenreaktion	94
IV.2.1	Grundlagen	94
IV.2.2	Kernenergie	95
IV.2.3	Reaktortypen	97
IV.3	Kernfusion	97
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>.99</b>



# Vorbemerkungen

Notationen, Konventionen, usw.

## Literatur

Allgemeine einführende Lehrbücher zum Thema sind z.B. (in alphabetischer Ordnung und ohne Anspruch auf Vollständigkeit)

- Basdevant, Rich & Spiro, *Fundamentals in nuclear physics* [1]
- Bethge, Walter & Wiedemann, *Kernphysik* [2]
- Cottingham & Greenwood, *An introduction to nuclear physics* [3]
- Friedmann, *Einführung in die Kernphysik* [4]
- Mayer-Kuckuk, *Kernphysik* [5]
- Povh, Rith, Scholz & Zetsche, *Teilchen und Kerne* [6]

In den drei Bänden von Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung* [7, 8, 9] sind 100 relevante Experimente bis etwa 1970 beschrieben und erläutert. Schließlich werden in Hering, *Angewandte Kernphysik* [10] wichtige praktische Anwendungen dargestellt.

# KAPITEL I

## Eigenschaften von Atomkernen

- 
- I.1 Bausteine von Atomkernen 2
  - I.2 Größe des Atomkerns 4
    - I.2.1 Klassische Streutheorie 4
    - I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns 7
    - I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen 11
    - I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen 13
  - I.3 Masse des Atomkerns 16
    - I.3.1 Grundlagen der Massenmessung 17
    - I.3.2 Bindungsenergie 17
    - I.3.3 Separationsenergien 19
  - I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns 20
    - I.4.1 Spin 20
    - I.4.2 Parität 20
    - I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente 21
  - I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne 23
    - I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik 23
    - I.5.2  $Z = 1, N = 0$ : Proton ( $p$ ) 24
    - I.5.3  $Z = 0, N = 1$ : Neutron ( $n$ ) 25
    - I.5.4  $Z = 1, N = 1$ : Deuteron ( ${}^2\text{H} \equiv d$ ) 25
    - I.5.5 Schwerere Kerne 25
- 

In diesem ersten Kapitel werden die grundlegenden Charakteristika von Atomkernen gesammelt, beginnend mit deren Zusammensetzung (Abschn. I.1). Danach fokussiert sich die Diskussion erstens auf klassische Aspekte des Kerns — Radius (Abschn. I.2) und Masse (Abschn. I.3) —, wobei die experimentellen Methoden zu deren Bestimmung kurz diskutiert werden. Dagegen befasst sich Abschnitt I.4 mit eher quantenmechanischen Eigenschaften. Schließlich werden die leichtesten stabilen Atomkerne in Abschn. I.5 kurz dargestellt.

Das ganze Kapitel bleibt eher phänomenologisch und beschränkt sich darauf, die Eigenschaften zu beschreiben, ohne irgendein Modell zu ihrer Erklärung in Betracht zu ziehen. Solche Modelle werden im Kap. II diskutiert.

### I.1 Bausteine von Atomkernen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der wahrscheinlich schon bekannten Zusammensetzung von Atomkernen. Dazu werden ein paar wichtige Begriffe definiert und Notationen eingeführt.

Vom Altertum bis zum 19. Jahrhundert haben erstens Philosophen, danach Naturwissenschaftler die Atomtheorie postuliert und allmählich experimentell nachgewiesen (für eine kurze Übersicht dieser historischen Entwicklung, s. den ersten Vortrag von W. Heisenberg in Ref. [11]). Zwischen der Entdeckung des Elektrons durch J. J. Thomson in 1897 und der Entdeckung des Neutrons durch J. Chadwick in 1932 (vgl. Experiment 11 in Ref. [7]) hat sich dann ein genaueres Bild des Atoms



kristallisiert: In einem Atom ist die Hülle negativ geladener Elektronen (Symbol:  $e^-$ ) um einen positiv geladenen Atomkern gebunden, der fast die gesamte Masse des Atoms trägt. Wiederum besteht der Atomkern aus zwei Arten von Bausteinen, und zwar aus *Protonen* (Symbol:  $p$ ) und *Neutronen* (Symbol:  $n$ ), die zusammen als *Nukleonen* (Symbol:  $N$ ) bezeichnet werden.

### Bemerkungen:

\* Im Folgenden wird das Symbol  $N$  nur selten für Nukleon verwendet, um die mögliche Verwechslung mit der Neutronenzahl [Gl. (I.1a)] zu vermeiden.

\* Hier wurde Nukleon nur als Sammelbegriff für Proton und Neutron verwendet, wie üblicherweise der Fall ist. Manchmal hat Nukleon einen präziseren Sinn, der im Kap. **Kernkraft** diskutiert wird.

\* Bekannterweise sind das Proton und das Neutron keine Elementarteilchen, sondern sie bestehen aus Quarks — die nach dem heutigen Wissen elementar sind — und Gluonen — die die starke Wechselwirkung zwischen Quarks vermitteln. Somit stellt sich die Frage, ob man den Atomkern als gebundenen Zustand von Quarks betrachten sollte. Für manche Probleme der Kernphysik — grob gesagt, solange die typisch ausgetauschten Energien kleiner als etwa 100 MeV bleiben — stellen jedoch die Nukleonen die geeigneten Freiheitsgrade dar.

Genauso wie ein chemisches Element durch die Anzahl seiner Elektronen charakterisiert wird, lässt sich ein gegebener Atomkern, auch *Nuklid* genannt,<sup>(1)</sup> durch die Anzahlen seiner Bestandteile gekennzeichnet, und zwar durch

*Ordnungs-, Kernladungs- oder Protonenzahl*  $Z$ : Anzahl der Protonen im Atomkern;  
*Neutronenzahl*  $N$ : Anzahl der Neutronen im Atomkern;  
*Massen- oder Nukleonenzahl*  $A$ : gesamte Anzahl der Protonen und Neutronen im Kern.

(I.1a)

Natürlich gilt die triviale Gleichung

$$Z + N = A. \quad (\text{I.1b})$$

Mithilfe dieser Zahlen lautet die übliche Schreibweise für ein Nuklid

$${}^A_Z\text{X}_N \quad \text{oder einfacher} \quad {}^A_Z\text{X} \quad \text{oder} \quad {}^A_Z( ), \quad (\text{I.1c})$$

wobei X das „chemische“ Symbol des Periodensystems für das Element mit Ordnungszahl  $Z$  ist. Wird dieses Symbol verwendet, so ist die Ordnungszahl  $Z$  schon festgelegt: somit kann sie weggelassen werden. Beispielsweise bezeichnen  ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  und  ${}^{208}\text{Pb}$  das gleiche Nuklid mit 82 Protonen und 126 Neutronen.

Fast alle Kerne können angeregt werden, wie Atome, so dass es manchmal verschiedene Nuklide mit denselben  $Z$  und  $N$  und einer Lebensdauer größer als  $10^{-10}$  s existieren kann, sogenannte *Isomere*, die unterschiedliche Eigenschaften besitzen.<sup>(2)</sup>

Atomkerne mit gleicher Protonenzahl und unterschiedlichen Neutronenzahlen werden *Isotope* genannt, z.B.  ${}^{12}\text{C}$  und  ${}^{14}\text{C}$ . Nuklide mit derselben Neutronenzahl und unterschiedlichen Protonenzahlen werden *Isotone* genannt, z.B.  ${}^{14}\text{C}$  und  ${}^{16}\text{O}$  mit je 8 Neutronen. Schließlich werden Nuklide mit der gleichen Massenzahl und unterschiedlichen Anzahlen von Protonen (und daher auch von Neutronen) werden *Isobare* genannt, z.B.  ${}^{14}\text{C}$  und  ${}^{14}\text{N}$ .

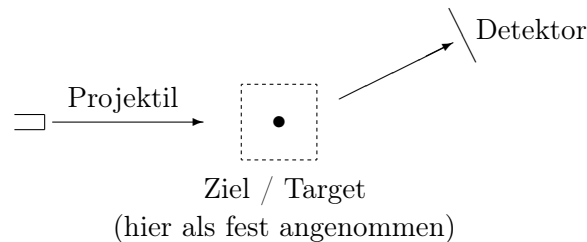
<sup>(1)</sup>Als „Nuklid“ wird manchmal — wie z.B. durch die IUPAC, vgl. die **entsprechende Seite** in der online-Version des „Gold Book“ — explizit ein elektrisch neutrales Objekt definiert, d.h. nicht nur der Atomkern sondern das ganze Atom einschließlich der Elektronen. Dahingegen werden in der Liste der Energiezustände solcher Nuklide die atomaren Anregungszustände nicht berücksichtigt, was dem Autor dieser Zeilen inkonsequent aussieht. Hiernach wird Nuklid Synonym für Atomkern sein.

<sup>(2)</sup>Die untere Grenze der Lebensdauer ist natürlich rein konventionell und hängt vom Autor ab. Dazu beschränken einige die Bezeichnung „Isomer“ auf angeregte Zustände.

Die bekannten Nuklide (im Oktober 2021, etwa 3300 sind „wohl charakterisiert“) werden in einer *Nuklidkarte* eingetragen, die ihre wichtigen Eigenschaften zusammenfasst: Stabilität bzw. Halbwertszeit für instabile Atomkerne (vgl. Kap. Radioaktivität); Häufigkeit der unterschiedlichen Isotope für natürlich vorkommende Nuklide; Zerfallsarten, mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten falls der Atomkern verschiedenen Zerfallskanälen folgen kann (vgl. Kap. Radioaktivität). Eine frei zugängliche Nuklidkarte mit zusätzlichen Informationen findet man im Internet z.B. auf <http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/> oder <https://www-nds.iaea.org/livechart/>.

## 1.2 Größe des Atomkerns

Zur experimentellen Messung der Größe eines Atomkerns werden meistens Streuexperimente durchgeführt: Dabei werden leichtere Projektilteilchen, deren Eigenschaften bekannt sind, an einem zu charakterisierenden Ziel (auch Target genannt) beschleunigt. Nach der Wechselwirkung zwischen Projektilen und Target werden die ersteren detektiert, wobei Informationen über das Target sowie über die eigentliche Art der Wechselwirkung können gewonnen werden.



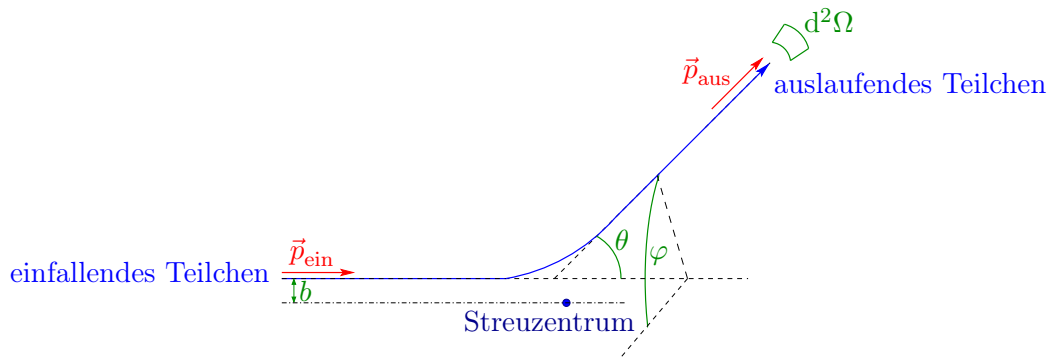
In diesem Abschnitt werden zunächst einige Begriffe und Ergebnisse der Streutheorie dargestellt, wobei die Diskussion auf eine klassische (d.h. nicht-quantenmechanische) Beschreibung beschränkt wird (Abschn. I.2.1). Diese Resultate werden in Abschn. I.2.2 auf den Fall der Streuung an dem Coulomb-Potential, erzeugt durch eine punktförmige elektrische Ladung, entsprechend den Bedingungen des historischen Rutherford'schen Streuexperimentes. Die Verallgemeinerung des Formalismus auf die Streuung an ausgedehnten Zielen wird in Abschn. I.2.3 diskutiert. Schließlich werden in Abschn. I.2.4 die experimentell gewonnenen Ergebnisse zur Größe von Atomkernen vorgestellt.

### 1.2.1 Klassische Streutheorie

Die Streuprozesse, die hiernach von Interesse sein werden, sind elastisch, d.h. die zwei Teilnehmer im Anfangszustand bleiben nach dem Stoß unverändert. Dazu wird das Potential, das die relevante Wechselwirkung vermittelt, nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen. Bekannterweise lässt sich dann das Zwei-Körper-Problem nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse als Ein-Körper-Problem beschreiben, und zwar als die Streuung eines Teilchens an einem festen *Streuzentrum*. Im für das Folgende relevanten Fall ist das Zielteilchen — entsprechend dem zu untersuchenden Atomkern — viel schwerer als das Projektil, so dass die reduzierte Masse fast gleich der Masse des letzteren ist, während das Streuzentrum mit der Position des Atomkerns übereinstimmt.

#### 1.2.1 a Definitionen

In der klassischen Mechanik folgt ein Teilchen in seiner Bewegung einer Bahnkurve, mit deren Hilfe einige charakteristischen Größen sich definieren lassen (vgl. Abb. I.1). Die asymptotischen Richtungen der Flugbahn vor dem Stoß („einfallendes Teilchen“ mit Impuls  $\vec{p}_{\text{ein}}$ ) und nach dem Stoß („auslaufendes Teilchen“ mit Impuls  $\vec{p}_{\text{aus}}$ ) definieren die *Streuebene*. Der Winkel  $\theta$  zwischen  $\vec{p}_{\text{ein}}$  und  $\vec{p}_{\text{aus}}$ , d.h. um den das einfallende Teilchen abgelenkt wird, heißt *Streuwinkel* oder auch *Ablenkwinkel*. Man sollte darauf aufpassen, dass der Streuwinkel vom Bezugssystem abhängt, in dem die Streuung untersucht wird.



**Abbildung I.1** – Darstellung einiger Größen zur Charakterisierung eines klassischen Streuprozesses.

Führt man eine Referenzrichtung senkrecht zur (experimentell bekannten!) Flugrichtung der einfallenden Teilchen ein, so wird der Impuls eines auslaufenden Teilchens neben  $\theta$  auch durch einen Azimutwinkel  $\varphi$  charakterisieren. Dann kennzeichnen  $\theta$  und  $\varphi$  die auslaufende Flugrichtung Teilchens vollständig. Echte Detektoren decken eine endliche Fläche, entsprechend endlichen  $\theta$ - und  $\varphi$ -Intervallen bzw. einem Raumwinkel  $\Omega$ . Im idealen Fall eines infinitesimal kleinen Detektors ist das zugehörige Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  durch

$$d^2\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{I.2})$$

gegeben.

In klassischer Streutheorie definiert man noch den *Stoßparameter*  $b$ , entsprechend dem minimalen Abstand der einfallenden Teilchen zum Streuzentrum für den fiktiven Fall, wo es sich geradlinig bewegen würden, statt abgelenkt zu werden, d.h. bei ausgeschalteter Wechselwirkung.

Berücksichtigt man auch den Azimutwinkel der Flugrichtung des einfallenden Teilchens, so kann man den Stoßparameter als Vektor betrachten:  $\vec{b}$ . Der Zweck der klassischen Streutheorie ist, die Beziehung zwischen den für auslaufende Teilchen charakteristischen Größen  $(\theta, \varphi)$  und dem Stoßparameter  $\vec{b}$ , d.h. die Funktionen  $(\theta(\vec{b}), \varphi(\vec{b}))$ , festzulegen.

#### Bemerkungen:

\* In der Quantenmechanik, wo Teilchen keiner Bahnkurve folgen, verliert der Begriff des Stoßparameters an Bedeutung.

\* Eigentlich ist der vektorielle Stoßparameter  $\vec{b}$  völlig durch seinen Betrag und einen Winkel charakterisiert, und zwar durch den (Polar)Winkel in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung der einfallenden Teilchen. Es handelt sich somit um einen „nur“ zweidimensionalen Vektor.

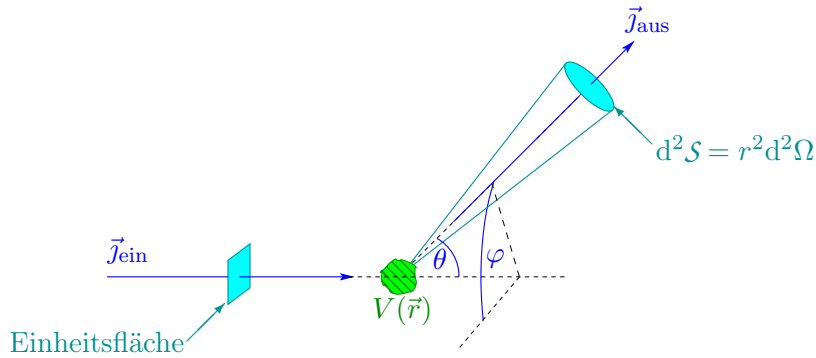
Zur Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit für bestimmte Prozesse werden Wirkungsquerschnitte benutzt. Somit charakterisiert der *differentielle Wirkungsquerschnitt* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Streuprozess die gestreuten Teilchen in ein Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  um eine Richtung  $(\theta, \varphi)$  emittiert werden (vgl. Abb. I.2).

Genauer wird  $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi)$  definiert durch

$$d^2\sigma = \frac{\text{Anzahl der pro Zeiteinheit in } d^2\mathcal{S} \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit}}.$$

Zum Ausdrücken der Anzahl  $d^3N_{\text{ein}}$  bzw.  $d^3N_{\text{aus}}$  der in einem Zeitintervall  $dt$  auf eine Fläche  $d^2\mathcal{S}'$  einfallenden bzw. durch eine Fläche  $d^2\mathcal{S}$  ausfallenden Teilchen führt man den einfallenden bzw. auslaufenden Teilchenfluss  $\vec{j}_{\text{ein}}$  bzw.  $\vec{j}_{\text{aus}}$ . Es wird daran erinnert, dass ein Teilchenfluss die Anzahl der in der Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche fliegenden Teilchen darstellt. Dann gelten

$$d^3N_{\text{ein}} = |\vec{j}_{\text{ein}}| \, d^2\mathcal{S}' \, dt \quad \text{bzw.} \quad d^3N_{\text{aus}} = |\vec{j}_{\text{aus}}| \, d^2\mathcal{S} \, dt = |\vec{j}_{\text{aus}}| \, r^2 \, d^2\Omega \, dt, \quad (\text{I.3})$$



**Abbildung I.2** – Darstellung einiger Größen zur Definition (I.4) des differentiellen Wirkungsquerschnitts.

wobei  $r$  den Abstand von  $d^2\mathcal{S}$  vom Streuzentrum bezeichnet, und damit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{J}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2}{|\vec{J}_{\text{ein}}|}. \quad (\text{I.4})$$

**Bemerkung:** Die Teilchenzahlerhaltung für die Projektileilchen hat zwei einfache Folgen, und zwar die Proportionalität  $|\vec{J}_{\text{aus}}| \propto |\vec{J}_{\text{ein}}|$  — je mehr Teilchen am Target stoßen, desto mehr gestreut werden — und  $|\vec{J}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| \propto 1/r^2$  — entsprechend der Erhaltung der Anzahl der in ein gegebenes Raumwinkelelement emittierten Teilchen. Somit ist die Definition (I.4) in der Tat unabhängig vom Abstand  $r$  sowie vom absoluten einfallenden Teilchenfluss.

Die Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitt über den ganzen Raumwinkel ergibt den *totalen (elastischen) Wirkungsquerschnitt*:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) d^2\Omega. \quad (\text{I.5})$$

Klassisch handelt es sich dabei um die (effektive) Schnittfläche des Ziels aus der Sicht eines einfallenden Teilchens, wie sich am Beispiel der Streuung eines klassischen Teilchens an einer harten Kugel illustrieren lässt.

#### Bemerkungen:

\* Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche; die typische Einheit in der Kern- und Teilchenphysik ist das Barn,  $1 \text{ b} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2$ , sowie seine Teile (mb,  $\mu\text{b}$ , nb, usw.).

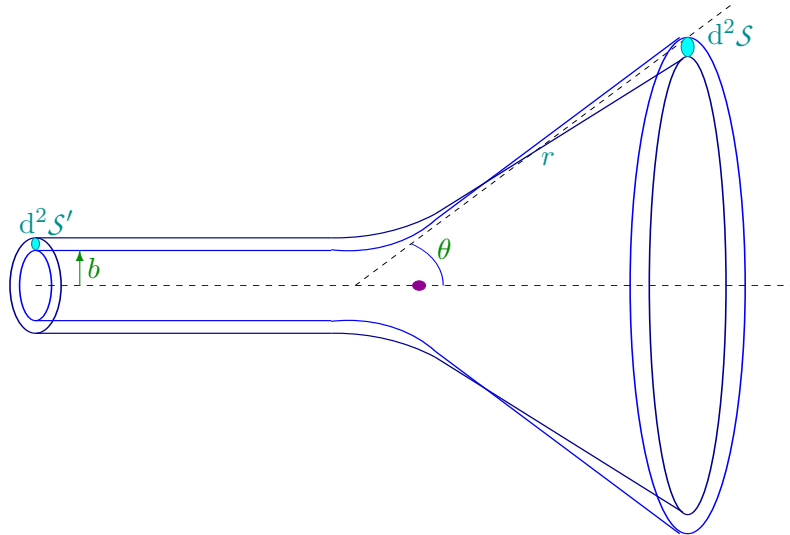
\* In der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts treten nur die *gestreuten* Teilchen auf. In der Vorwärtsrichtung  $\theta = 0$  können diese nicht von den durchlaufenden Teilchen experimentell unterschieden werden, so dass der zugehörige Vorwärtswirkungsquerschnitt nicht direkt messbar ist, sondern nur durch Extrapolation des Wirkungsquerschnitts bei  $\theta \neq 0$ . Dazu können Detektoren nie den ganzen  $4\pi$ -Raumwinkel um ein Streuzentrum decken. Somit ist der totale Wirkungsquerschnitt mehr ein theoretischer Begriff als eine messbare Größe.

### I.2.1 b Geometrische Betrachtungen

Im Folgenden wird angenommen, dass das für die Streuung verantwortliche Potential kugelsymmetrisch ist. Dann ist der Azimutwinkel des auslaufenden Teilchens gleich demjenigen vor der Streuung, d.h.  $\varphi$  ist auch der Azimutwinkel von  $\vec{b}$ , während der Streuwinkel  $\theta$  nur vom Betrag  $b$  abhängt. Somit braucht man nur die Abhängigkeit  $\theta(b)$ . Im Prinzip hängt  $\theta$  auch von der Geschwindigkeit bzw. kinetischen Energie der Projektile ab; hier wird angenommen, dass alle einfallenden Teilchen dieselbe kinetische Energie haben.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine Kraft zwischen Projektil und Ziel betrachten, deren Stärke mit dem relativen Abstand abnimmt. Infolgedessen wird der Streuwinkel  $\theta$  mit steigendem Stoßparameter  $b$  kleiner, d.h.  $d\theta/db < 0$ .

Sei ein Flächenelement  $d^2\mathcal{S}'$ , abgegrenzt durch die Stoßparameter  $b$  und  $b + db$  mit  $db > 0$  und die Azimutwinkel  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$ :  $d^2\mathcal{S}' = b db d\varphi$ . Die auf  $d^2\mathcal{S}'$  einfallenden Teilchen werden alle in ein Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  gestreut, das bei dem Abstand  $r$  einer Fläche  $d^2\mathcal{S}$  entspricht: geometrisch steht  $d^2\Omega$  in eindeutiger Beziehung zu  $d^2\mathcal{S}'$ , vgl. Abb. I.3. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass  $d\theta$  negativ für  $db > 0$  ist, gibt die Beziehung (I.2) einfach  $d^2\mathcal{S} = -r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .



**Abbildung I.3** – Geometrischer Zusammenhang zwischen den durch die Projektilteilchen vor bzw. nach der Streuung durchgeflogenen Flächenelementen,  $d^2\mathcal{S}'$  bzw.  $d^2\mathcal{S}$ .

Da das Streuprozess elastisch ist, und somit die Teilchenzahl erhält, sind die Anzahlen der in  $dt$  durch die Flächen  $d^2\mathcal{S}$  und  $d^2\mathcal{S}'$  fliegenden Teilchen gleich. Unter Nutzung der Beziehungen (I.3) ergibt sich dann

$$|\vec{j}_{\text{ein}}| b db d\varphi = -|\vec{j}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Nach einfacher Umschreibung dieser Gleichung und Einsetzen in die Definition (I.4) erhält man die Beziehung

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}, \quad (\text{I.6})$$

unabhängig von der spezifischen Wechselwirkung zwischen Projektil und Ziel. Somit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt völlig durch die Funktion  $b(\theta)$  bzw. durch die Umkehrfunktion  $\theta(b)$  und ihre Ableitung bestimmt.

### I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns

Ein wichtiges Beispiel von Anwendung der klassischen Streutheorie ist die elastische Streuung von elektrischen Punktladungen  $q$  mit Masse  $m$  an einem punktförmigen Ziel mit der elektrischen Ladung  $Q$  und einer sehr viel größeren Masse.

In diesem Fall herrscht zwischen den an den Stoß teilnehmenden Teilchen die elektromagnetische Wechselwirkung. Genauer unterliegen die Projektile der Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I.7})$$

mit dem Abstand  $r$  zum Ziel und dem radialen Einheitsvektor  $\vec{e}_r$  in Richtung vom Ziel zum Projektil.

Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze — hier Energie und Drehimpuls — und Anwendung des Newtonschen Gesetzes findet man die Beziehung zwischen dem Stoßparameter  $b$  und dem Streuwinkel  $\theta$

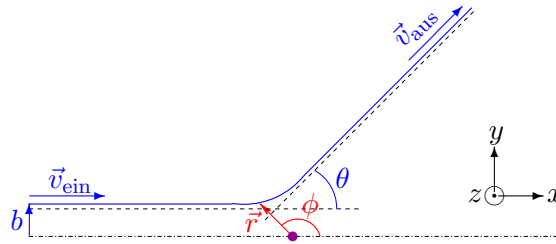
$$b(\theta) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mv^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (\text{I.8})$$

wobei  $v$  der Betrag der asymptotischen Geschwindigkeit des Projektils ist.

Sei  $\phi$  der (Polar-)Winkel zwischen der asymptotischen Flugrichtung des Projektils und  $\vec{e}_r$ . Die Position  $\vec{r}(t)$  des Projektils zur Zeit  $t$  wird von  $r$  und  $\phi$  charakterisiert und seine Geschwindigkeit lautet

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{e}_r + r(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi,$$

wobei  $\vec{e}_\phi$  senkrecht auf  $\vec{e}_r$  ist (vgl. Abb. I.4).



**Abbildung I.4** – Koordinatensysteme für die Beschreibung der Streuung.

Im „Anfangszustand“ vor dem Streuprozess ( $t = -\infty$ ) ist das Projektil bei  $r = \infty$ ,  $\phi = \pi$ , mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{ein}} = |\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_x$ . Im Endzustand ( $t = +\infty$ ) gelten  $r = \infty$ ,  $\phi = \theta$ , und  $\vec{v}_{\text{aus}} = |\vec{v}_{\text{aus}}| (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$ .

Die Erhaltung der gesamten Energie  $\frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{ein}}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{aus}}^2$  — im Unendlichen verschwindet die Coulombsche potentielle Energie — gibt sofort  $|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}| \equiv v$ .

Wiederum lautet der Bahndrehimpuls

$$\vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = mr(t)^2 \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_z,$$

so dass seine Erhaltung zwischen dem Anfangszustand  $[\vec{L}(-\infty) = -mb|\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_z = -mbv \vec{e}_z]$  und dem Zeitpunkt  $t$  führt zur Gleichung

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{bv}{r(t)^2}. \quad (\text{I.9})$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung  $m d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{\text{Coul.}}$ . Nach Projektion auf die  $x$ -Achse kommt für die  $x$ -Komponente  $v_x(t)$  der Geschwindigkeit  $d\vec{r}(t)/dt$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mr(t)^2} \cos \phi(t).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. (I.9), so ergibt sich

$$\frac{dv_x}{d\phi} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mbv} \cos \phi,$$

d.h. die Bahnkurve wird nicht mehr durch die Zeit  $t$ , sondern durch den Polarwinkel  $\phi$  parametrisiert. Die Integration von  $\phi = \pi$ , entsprechend  $v_x = v$ , bis  $\phi = \theta$ , d.h.  $v_x = v \cos \theta$ , gibt

$$v(\cos \theta - 1) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mbv} \sin \theta,$$

d.h.

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mv^2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta},$$

was unter Verwendung üblicher trigonometrischer Identitäten zur Gl. (I.8) führt.

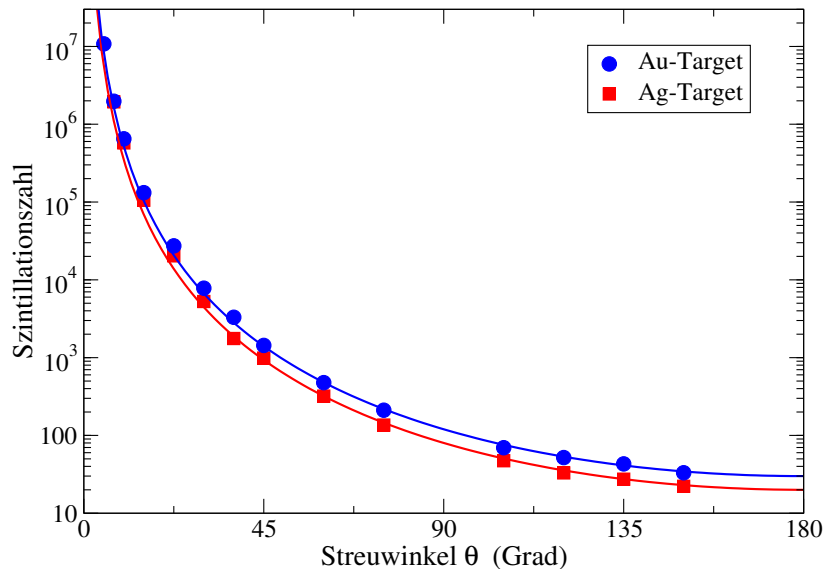
Nach Ableiten von  $b(\theta)$  [Gl. (I.8)] liefert Gl. (I.6) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für das Problem und zwar

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2}mv^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10a})$$

Führt man die kinetische Energie des Projektils  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$  ein, so ergibt sich die sogenannte *Rutherford'sche Streuformel*

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10b})$$

Tatsächlich hat E. Rutherford diese Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts benutzt, um die Ergebnisse von durch H. Geiger und E. Marsden durchgeführten Experimenten [12] zu interpretieren.<sup>(3)</sup> Die charakteristische  $(\sin \frac{\theta}{2})^{-4}$ -Abhängigkeit in Gl. (I.10b) stimmt nämlich mit der Verteilung des Streuwinkels gemessen in Streuung von  $\alpha$ -Teilchen — d.h.  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne — an dünnen Gold- bzw. Silber-Folien überein, vgl. Abb. I.5.

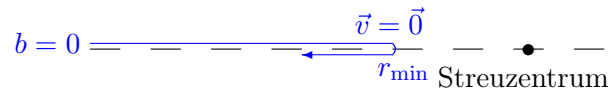


**Abbildung I.5** – Winkelverteilung elastisch gestreuter  $\alpha$ -Teilchen an Gold bzw. Silber, verglichen mit den entsprechenden Rutherford'schen Wirkungsquerschnitten, Gl. (I.10b).

Dabei hat Rutherford argumentiert, dass jedes  $\alpha$ -Teilchen dank der Dünne der Targets in den meisten Fällen nur an einem einzelnen Atom stößt. Somit wird „Vielfachstreuung“ vermieden, was die Modellierung vereinfacht. Der Stoß zwischen einem  $\alpha$ -Projektil und einem Gold- bzw. Silber-Atom wurde dann als elektromagnetische Streuung einer Punktladung  $q = ze$  mit  $z = 2$  an einer Punktladung  $Q = Ze$  mit  $Z = 79$  bzw.  $Z = 47$  modelliert, wobei  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C die Elementarladung ist. Dementsprechend sollte der Wirkungsquerschnitt (I.10b) für Stöße an Gold größer als für Stöße an Silber sein, was auch experimentell gefunden wurde.

Einfache Überlegungen liefern den kleinsten Abstand — bei gegebener kinetischer Energie des Projektils — zwischen Projektil und Streuzentrum in einem Stoß. Offensichtlich wird dieses Minimum für Stöße mit verschwindendem Stoßparameter  $b$  erreicht, d.h. wenn das Projektil direkt auf das Ziel fliegt. Die zugehörige Bahnkurve wird in Abb. I.6 dargestellt: indem das Projektil sich dem Streuzentrum nähert, wird es durch die Coulomb-Abstoßung abgebremst, bis seine Geschwindigkeit  $v_x$  null wird und ihr Zeichen ändert, was genau im Punkt des kleinsten Abstands  $r_{\text{min}}(b = 0)$  passiert. Danach fliegt das Projektil zurück, entsprechend einem Streuwinkel  $\theta = \pi$ .

<sup>(3)</sup>Die Experimente sind in Ref. [7] Experiment 6 beschrieben.



**Abbildung I.6** – Flugbahn eines Projektilteilchens mit Stoßparameter  $b = 0$ .

Drückt man die Energieerhaltung  $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r) + E_{\text{kin}}(r)$  für das Projektilteilchen aus, so ist die Gesamtenergie lange vor oder nach dem Stoß  $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}(r = \infty)$  und im Punkt  $\vec{r}_{\text{min}}(b=0)$  des minimalen Abstands  $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r_{\text{min}}(b=0))$ . Unter Berücksichtigung der Form der potentiellen Energie im Coulomb-Feld  $E_{\text{Coul}}(r) = qQ/(4\pi\epsilon_0 r)$  kommt

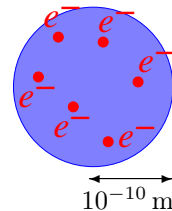
$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{min}}(b=0)} = E_{\text{kin}}(r = \infty). \quad (\text{I.11})$$

Im Geiger–Marsden-Experiment galten  $q = 2e$ ,  $Q = 79e$  (für Streuung an Au-Atomen) und für die kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen  $E_{\text{kin}}(\infty) = 7,7 \text{ MeV}$ . Diese Werte führen zu einer minimalen Entfernung  $r_{\text{min}}(b=0) \simeq 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ fm}$ .<sup>(4)</sup>

Aus der Übereinstimmung zwischen den experimentellen Ergebnissen und seiner Modellierung konnte Rutherford schließen, dass positive Ladungsträger in Gold-Atomen sich in einem kleinen Bereich mit Radius kleiner als etwa 30 fm befinden. Dazu konzentriert sich fast die ganze Atommasse in diesem Bereich, dessen elektrische Ladung  $Ze$  genau gleich das Negative deren der  $Z$  Elektronen des Atoms ist. Anhand dieser Ergebnisse hat Rutherford sein planetarisches Atommodell vorgeschlagen [13], in welchem Atome aus einem kleinen positiv geladenen Kern und einer Elektronenhülle mit typischem Radius von etwa  $10^{-10} \text{ m}$  bestehen.

Die charakteristische Größe von Atomen ließ sich schon früher abschätzen. Laut dem Gesetz von Avogadro (1811) enthalten Gase bei gegebenen Drucken und Temperaturen in gleichen Volumina die gleiche Teilchenzahl. In 1865 konnte Loschmidt die Anzahl der in einer Volumeneinheit enthaltenen Molekülen — oder äquivalent die Loschmidt- / Avogadro-Zahl — ermitteln und somit für Atome eine Größenordnung von ca.  $10^{-10} \text{ m}$  berechnen.

Nach seiner Entdeckung des Elektrons (1897) schlug J. J. Thomson in 1904 sein „plum-pudding model“ des Atoms vor, in dem die Elektronen — ähnlich den Rosinen in einem Teig — sich in einem kontinuierlichen Medium positiver Ladung homogen verteilen, das so groß wie das ganze Atom ist. Die Masse eines solchen Atoms sammelt sich nicht in einem geringen Bereich, so dass das Modell durch die Geiger–Marsden-Experimente widerlegt war.



### Bemerkungen:

\* Die Rutherford-Streuformel (I.10b) lässt sich günstig mithilfe der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante  $\alpha \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$  umschreiben, indem die Ladungen  $q$  und  $Q$  durch  $ze$  und  $Ze$  ersetzt werden. Im System „natürlicher Einheiten“ der theoretischen Physik, in dem  $\hbar = c = 1$ , gilt somit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{zZ\alpha}{E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}.$$

\* Die Rutherford'sche Streuformel führt zu einem unendlichen totalen Wirkungsquerschnitt: für kleine Streuwinkel  $\theta$  ist  $\sin \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$ , während  $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , so dass das Integral in Gl. (I.5) wie  $\theta^{-2}$  divergiert. Der Grund dafür ist die „unendliche Reichweite“ des durch den isolierten Atomkern erzeugten Coulomb-Potentials.<sup>(5)</sup>

<sup>(4)</sup>Die für die Kernphysik günstigen Einheiten und ihr Zusammenhang zu denen des SI-Systems werden in Abschn. I.5.1 zusammengefasst.

<sup>(5)</sup>... was technisch bedeutet, dass  $rV(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  nicht gegen Null geht.



In einem Atom schirmen die negativ geladenen Elektronen die positive Ladung des Kerns für Abstände größer als die typische Größe des Atoms ab. Diese Abschirmung des Potentials führt zu einer Änderung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für kleine Streuwinkel, woraus  $d^2\sigma/d^2\Omega$  nicht mehr divergiert. Die entsprechende Änderung ist für übliche Energien in der Kernphysik vernachlässigbar.

Wiederum war die kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen in den Geiger–Marsden-Experimenten hoch genug, damit die Teilchen tief in die Atome eindringen und die „nackten“ Atomkerne sehen konnten. Der kleinste Abstand  $r_{\min}(b)$  der Bahn des  $\alpha$ -Teilchens vom Kern beträgt nämlich

$$r_{\min}(b) = \frac{1}{2} \left[ r_{\min}(b=0) + \sqrt{r_{\min}(b=0)^2 + 4b^2} \right], \quad (\text{I.12})$$

wobei  $r_{\min}(b=0)$  durch Gl. (I.11) gegeben ist, kann wie folgt berechnet werden. Dabei kann der Stoßparameter durch den Streuwinkel ausgedrückt werden, vgl. Gl. (I.8), die sich leicht umschreiben lässt als  $b(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \cot \frac{\theta}{2}$ , woraus

$$r_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{I.13})$$

folgt. Auch für den kleinsten durch Geiger und Marsden gemessenen Streuwinkel ( $\theta = 5^\circ$ ) kommen  $\alpha$ -Teilchen weniger als 500 fm nah am Kern, d.h. tief ins Innere des Atoms.

Beweis der Beziehung (I.12):

folgt aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses:  $L(\infty) = L(r_{\min})$ .

\* Die oben dargestellte Berechnung von Rutherford erfolgte im Rahmen der klassischen Mechanik. Im Nachhinein stellt sich die Frage, ob eine quantenmechanische Beschreibung des Streuprozesses nicht sinnvoller wäre. In diesem besonderen Fall ergibt jedoch eine solche Berechnung dank einigen Umständen dasselbe Ergebnis (in der „Bornschen Näherung“, d.h. in Störungsrechnung zur erster Ordnung) wie die klassische Beschreibung. Erstens war im historischen Rutherfordschen Streuexperiment die mit dem  $\alpha$ -Teilchen assoziierte Wellenlänge  $\lambda = \hbar c / \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$  viel kleiner als der kleinste Abstand zwischen Projektil und Ziel: für  $E_{\text{kin}} = 7,7 \text{ MeV}$  ist  $\lambda \simeq 1 \text{ fm} \ll r_{\min}$ , so dass die „wellenartige“ Natur der Teilchen hier keine Rolle spielt. Dazu hat das  $\alpha$ -Teilchen den Spin 0: für die Streuung spinbehafteter Teilchen nimmt der Wirkungsquerschnitt eine (leicht) unterschiedliche Form an — obwohl der Unterschied noch für relativistische Projektile eine Rolle spielt.

Aus den Geiger–Marsden-Experimenten lässt sich nicht auf eine endliche Größe des Atomkerns schließen, da die Ergebnisse sich mit denen für Streuung an einem punktförmigen Ziel übereinstimmen. Somit ist nur bekannt, dass der Kernradius kleiner als der kleinste Abstand  $r_{\min}$  zwischen  $\alpha$ -Teilchen und Kernen ist.

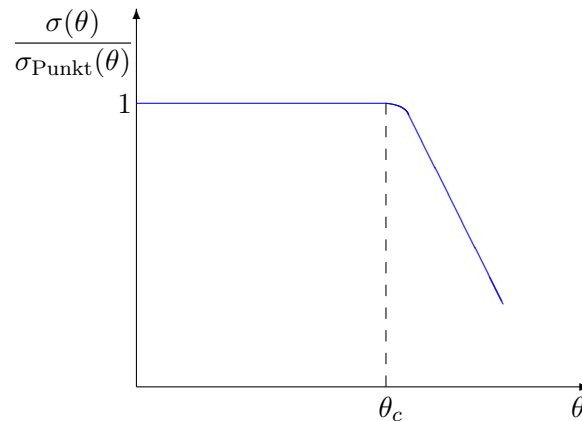
### I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen

Die Beziehung (I.11) weist darauf hin, wie Information über die Ausdehnung des Atomkerns kann gewonnen werden. Somit kann man entweder Kerne mit kleinerer Ladungszahl  $Z = Q/e$  verwenden, um die Coulomb-Abstoßung zu verringern, oder Projektile mit höherer kinetischer Energie benutzen. In beiden Fällen kann das Projektil näher am Kern kommen und den Einfluss eines nicht-verschwindenden Radius spüren, woraus eine Abweichung von der Rutherfordschen Streuformel folgt.

Sei zunächst angenommen, dass die an Atomen gestreuten Projektile mit dem Atomkern nur elektromagnetisch wechselwirken. Im Nachhinein ist bekannt, dass dies nicht der Fall für  $\alpha$ -Teilchen ist, die auch mit dem Kern durch die starke Kernkraft wechselwirken. Im Gegensatz dazu unterliegen Elektronen nicht der starken Wechselwirkung, so dass ihre Streuung meistens durch die elektromagnetische Kraft verursacht wird.<sup>(6)</sup> Qualitativ gesehen wird das in den Kern eindringende Projektil

<sup>(6)</sup>Eigentlich unterliegen Elektronen auch der schwachen Kernkraft, die hier aber vernachlässigbar gegenüber die elektromagnetische Wechselwirkung ist.

eine geringere elektrische Ladung spüren, als wenn der Kern punktförmig wäre, so dass es weniger abgestoßen bzw. gestreut ist. Somit kann man bei festem Streuwinkel  $\theta$  erwarten — vorausgesetzt dieser Winkel groß genug ist, damit der mit Gl. (I.13) berechnete entsprechende Wert des kleinsten Abstands des Projektils vom Streuzentrum  $r_{\min}(\theta)$  kleiner als der Kernradius ist —, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$  vom Wert für Streuung an einem punktförmigen Ziel abweicht. Genauer sollte  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$  kleiner als für Stöße an Punktladungen sein: das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zum Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer Punktladung sollte ab einem gewissen Wert von  $\theta$  kleiner als 1 werden, wie in Abb. I.7 schematisch dargestellt wird.



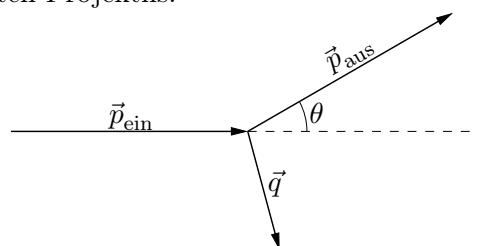
**Abbildung I.7** – Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts [hier der Kurze halber als  $\sigma(\theta)$  bezeichnet] für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zu jenem für Streuung an einer Punktladung.

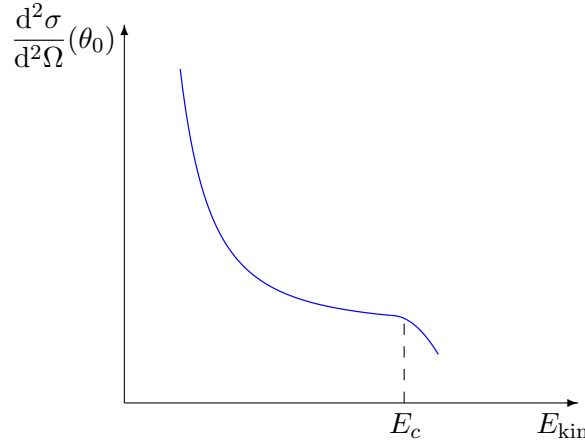
Eigentlich wurde ein solches Verhalten experimentell beobachtet, z.B. in Streuexperimenten mit  $\alpha$ -Teilchen mit  $E_{\text{kin}} = 22$  MeV an verschiedenen Kernen wie Gold ( $^{197}\text{Au}$ ) oder Blei ( $^{208}\text{Pb}$ ) [14]. Dabei wird das Verhältnis kleiner als 1 für  $\theta_c \simeq 90^\circ$ , entsprechend dank Gl. (I.11) und (I.13) einem kleinen Abstand der  $\alpha$ -Teilchen vom Kernzentrum von etwa 10 fm.

**Bemerkung:** Anstatt eine Abweichung von punktförmigen Fall ab einem gewissen Streuwinkel für feste kinetische Energie zu betrachten, kann man auch den Streuwinkel  $\theta_0$  festlegen und die kinetische Energie variieren lassen. Dann soll die Abweichung ab einem Wert  $E_c$  von  $E_{\text{kin}}$  auftreten. Genauer soll der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta_0)$  für  $E_{\text{kin}} \leq E_c$  wie  $E_{\text{kin}}^{-2}$  skalieren, wie in Gl. (I.10b) zu sehen ist, während das Skalenverhalten für höhere kinetische Energien nicht mehr gilt (s. Abb. I.8). Aus dem Wert  $E_c$  der kinetischen Energie, für die das  $E_{\text{kin}}^{-2}$ -Skalieren verletzt wird, kann die Größe des Kernradius abgeschätzt werden.

#### Elektrischer Formfaktor

Für eine mehr quantitative Beschreibung der Ausdehnung des Ziels sowie der zugehörigen Ladungsverteilung ist es zunächst günstig, den differentielle Wirkungsquerschnitt durch den *Impulsübertrag* zu beschreiben. Dabei ist der Letztere durch  $\vec{q} \equiv \vec{p}_{\text{ein}} - \vec{p}_{\text{aus}}$  definiert, mit  $\vec{p}_{\text{ein}}$  bzw.  $\vec{p}_{\text{aus}}$  dem Impuls des einfallenden bzw. gestreuten Projektils:





**Abbildung I.8** – Verletzung des  $E_{\text{kin}}^{-2}$ -Skalierens des Rutherford'schen Wirkungsquerschnitts (I.10b) bei festem Streuwinkel  $\theta_0$ .

Im Fall einer elastischen Streuung gilt  $|\vec{p}_{\text{aus}}| = |\vec{p}_{\text{ein}}|$ , so dass  $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_{\text{ein}}| \sin \frac{\theta}{2}$  — der Dreieck mit Seiten  $\vec{p}_{\text{ein}}$ ,  $\vec{p}_{\text{aus}}$  und  $\vec{q}$  ist nämlich gleichseitig.

Mithilfe der Gleichung  $E_{\text{kin}} = |\vec{p}_{\text{ein}}|^2 / 2m$  und der obigen Beziehung zwischen  $\vec{p}_{\text{ein}}$  und  $\vec{q}$  lässt sich die Rutherford'sche Streuformel (I.10b) leicht durch  $\vec{q}$  ausdrücken als

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega}(\vec{q}) = \left( \frac{qQ}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4}. \quad (\text{I.14})$$

Allgemeiner kann man jeden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die durch die Coulomb-Kraft vermittelte elastische Streuung an einem punktförmigen Streuzentrum durch den Impulsübertrag ausdrücken, egal, ob man relativistische oder quantenmechanische Effekte berücksichtigt. Sei  $d^2 \sigma / d\Omega(\vec{q})|_{\text{Punkt}}$  dieser Wirkungsquerschnitt. Für die Streuung an ausgedehnten Zielen gilt

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega}(\vec{q}) = F^2(\vec{q}) \frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega}(\vec{q}) \Big|_{\text{Punkt}} \quad (\text{I.15})$$

wobei  $F^2(\vec{q})$  der *elektrische Formfaktor* des Ziels ist, der mit der im nächsten Paragraph diskutierten elektrischen Ladungsdichteverteilung  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$  verknüpft ist:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Q} \int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3 \vec{r} \right|^2. \quad (\text{I.16})$$

(Wenn ich Zeit finde, werde ich diese Formel weiter erklären. N.B.)

## I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen

### I.2.4a Ladungsdichteverteilung

Zur Beschreibung eines ausgedehnten elektrisch geladenen Bereichs, insbesondere eines Atomkerns, ist mehr als seine Gesamtladung  $Q$  erforderlich. Die ganze nötige Information ist in der *elektrischen Ladungsdichteverteilung*  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$  enthalten, die so definiert ist, dass das Produkt  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3 \vec{r}$  die Ladung im Volumenelement  $d^3 \vec{r}$  um den Punkt  $\vec{r}$  darstellt. Integriert über den ganzen Raum soll die Ladungsdichteverteilung die gesamte Ladung  $Q$  ergeben, entsprechend der Normierung

$$\int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3 \vec{r} = Q. \quad (\text{I.17})$$

Experimentell liefern differentielle Wirkungsquerschnitte nicht genau  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ , sondern das Betragsquadrat deren Fourier-Transformierten, Gl. (I.16). Solche Wirkungsquerschnitte für Streuungen verschiedener elektrisch geladener Projektile — insbesondere von Elektronen, die der starken

Wechselwirkung nicht unterliegen — an unterschiedlichen Atomkernen wurden sorgfältig gemessen,<sup>(7)</sup> woher sich die elektrischen Formfaktoren der Kerne durch Gl. (I.15) gewinnen lassen. Aus  $F^2(\vec{q})$  ergibt sich dann die Ladungsdichteverteilung jedes einzelnen Kerns.

Für „leichte“ Atomkerne mit Massenzahl  $A < 20$  lassen sich die so erhaltenen Ladungsdichteverteilungen in erster Näherung günstig mit Gaußsche Verteilungen

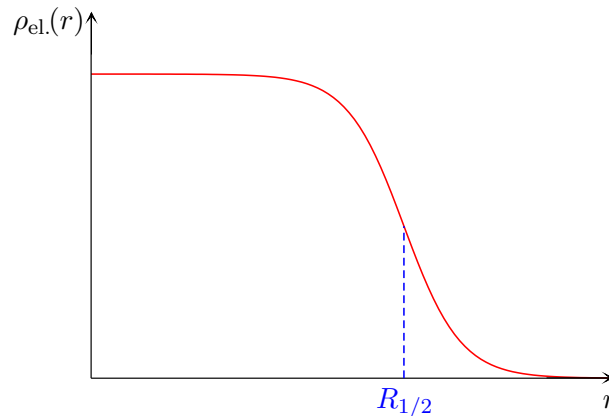
$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_0 \left( \frac{1}{\pi R^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-r^2/R^2} \quad (\text{I.18})$$

anpassen, wobei wie üblich  $r \equiv |\vec{r}|$ .

Für schwerere, nicht-deformierte (vgl. Bemerkung unten) Kerne mit  $A \geq 20$  und Ladung  $Ze$  liefert die in Abb. I.9 dargestellte *Woods-Saxon-Verteilung* (auch manchmal *Fermi-Verteilung* genannt)

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\infty}(Z, A)}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.19})$$

eine sehr gute Näherung. Dabei hängen die Parameter wie folgt von Massen- und Ladungszahl ab.



**Abbildung I.9** – Verlauf einer Woods-Saxon-Verteilung (I.19).

- $\rho_{\infty}(Z, A) = 0,17 Ze/A \text{ C}\cdot\text{fm}^{-3}$  ist ungefähr gleich der Ladungsdichte im Zentrum des Kerns;
- die Dicke  $\delta$  der Randzone kann als unabhängig vom Kern angenommen werden,  $\delta = 0,545 \text{ fm}$ ;
- $R_{1/2}$ , entsprechend dem Abstand, wo die Hälfte der Ladungsdichte im Kernzentrum vorliegt, nimmt mit der Massenzahl  $A$  zu.

Eine nützliche Erfassung von Parametrisierungen der Ladungsdichteverteilungen verschiedener stabiler Atomkerne befindet sich in Ref. [16].

**Bemerkung:** Die oben angegebenen Gaußsche und Woods-Saxon-Ladungsdichteverteilungen beschreiben offensichtlich kugelsymmetrische Kerne, denn die Verteilungen hängen nur vom Abstand zum Kernzentrum  $r$  ab. Wie im später kommenden Abschnitt I.4.3 detaillierter diskutiert wird ist diese Annahme für den großen Teil der stabilen Kerne eine gute Näherung. Bei manchen sog. *deformierten* Kernen treten jedoch erhebliche Abweichungen von der Kugelsymmetrie auf, z.B. bei Uran. Dann ist ein Umdrehungsellipsoid eine bessere Approximation an der (durch die Ladungsverteilung dargestellten) Gestalt des Kerns.

<sup>(7)</sup> z.B. durch R. Hofstadter und seine Mitarbeiter; vgl. Experimente 19-20 in Ref. [7] sowie Ref. [15].

### I.2.4 b Kernradien

Aus Streuungen bei kleinen Impulsüberträgen  $|\vec{q}|$  lässt sich tatsächlich nur der quadratisch gemittelte („root mean square“ = rms) Radius gewinnen:<sup>(8)</sup>

$$R_{\text{rms}}^2 \equiv \frac{\int r^2 \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}} \equiv \langle r^2 \rangle.$$

Oft gibt man anstatt  $R_{\text{rms}}$  den äquivalenten Radius  $R_e$  einer homogen geladenen Kugel mit demselben  $\langle r^2 \rangle$  an, d.h.  $R_e^2 = \frac{5}{3} R_{\text{rms}}^2$ . Experimentell gilt  $R_e \simeq r_0 A^{1/3}$  mit  $r_0 = 1,3 \pm 0,1$  fm.

Schließlich wird noch ein zusätzlicher Radius eingeführt:  $R_s$  ist der äquivalente Radius einer homogen geladenen Kugel, die überall die Ladungsdichte  $\rho_\infty(Z, A)$  hat, so dass  $Ze = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_\infty(Z, A)$ . Mit dem oben gegebenen experimentell gewonnenen Wert für  $\rho_\infty(Z, A)$  ist  $R_s = 1,128 A^{1/3}$  fm.

#### Bemerkungen:

\* Der Definition nach ist  $R_s$  genau proportional zu  $A^{1/3}$  für alle Atomkerne, während die entsprechende Proportionalität für  $R_{1/2}$  oder  $R_e$  nur annähernd ist.

\* Durch das Ersetzen von einem Elektron eines Atoms durch ein Myon — Elementarteilchen mit elektrischer Ladung  $-e$  und Masse  $m_\mu \simeq 207m_e$  — wird ein myonisches Atom erzeugt. Wegen seiner viel größeren Masse ist das Myon stärker gebunden am Kern als ein Elektron, sodass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Inneren des Atomkerns groß wird. Beispielsweise beträgt der Bohrsche Radius der Myonenbahn um einen Blei-Kern etwa 3 fm, im Vergleich mit dem Kernradius  $R_s \simeq 7$  fm. Somit spürt das Myon während eines großen Teils seiner Bahn ein schwächeres Coulomb-Potential, als wenn der Kern punktförmig wäre, was seine Bindungsenergie verringert. Folglich liefert die Messung der Bindungsenergie des Myons eine Abschätzung des Kernradius [17] — oder genauer von  $R_{\text{rms}}$ .

### I.2.4 c Kerndichteverteilung

Der große Vorteil der Streuexperimente von Elektronen an Kernen besteht darin, dass dabei die einzige Wechselwirkung zwischen Projektil und Target elektromagnetischer Natur ist und somit gut bekannt. Andererseits sind solche Streuungen nur gegenüber die Verteilung der elektrisch geladenen Protonen empfindlich, liefern aber keine Auskunft über die Neutronen.<sup>(9)</sup>

Kollisionen von relativistischen Protonen mit kinetischer Energie  $E_{\text{kin}} \approx 1$  GeV ermöglichen jedoch die Messung der gesamten Teilchendichteverteilung im Kern unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Kraft zwischen dem gestreuten Proton und denjenigen im Kern, deren Verteilung unabhängig durch Elektronenstreuung messbar ist [17]. Somit erhält man auch die Verteilung der Neutronen. Bei Kernen in der Nähe des  $\beta$ -Stabilitätlinie (s. Abschn. II.2.2 a) und einem geringen Neutronenüberschuss wird in guter Näherung kein Unterschied zwischen den Protonen- und Neutronenverteilungen beobachtet.

Anhand neuerer Methoden — Paritätsverletzende Elektronstreuung [18] oder die Photoerzeugung von  $\pi^0$ -Mesonen [19] — wurde eine kleine „neutron skin“, entsprechend einem größeren Radius für die Verteilung von Neutronen als für jene von Protonen, im neutronreichen  $^{208}\text{Pb}$ -Atomkern beobachtet, wobei die Differenz der Radien je nach dem Experiment zwischen etwa 0.15 und 0.3 fm beträgt.

<sup>(8)</sup>Die Taylor-Entwicklung des Formfaktors (I.16) bei  $\vec{q} = \vec{0}$  gibt nämlich  $F^2(\vec{q}) = \left| 1 + i \frac{\vec{q} \cdot \langle \vec{r} \rangle}{\hbar} - \frac{\langle r^2 \rangle}{6\hbar^2} |\vec{q}|^2 + \dots \right|^2$ , wobei der lineare Term für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung verschwindet.

<sup>(9)</sup>Eigentlich erzeugen die magnetischen Dipolmomente der Neutronen Dipolfeldpotentiale, deren Stärke aber viel kleiner ist, als jene des durch die Protonen erzeugten Coulomb-Potentials.

In Zusammenfassung ist die Nukleonendichte in einem nicht-deformierten Atomkern mit  $A \gtrsim 20$  in guter Näherung durch

$$n(\vec{r}) = \frac{n_\infty}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.20})$$

gegeben, wobei  $R_{1/2}$  mit der Massenzahl  $A$  zunimmt, während  $n_\infty$ , entsprechend ungefähr der Teilchendichte im Kernzentrum, unabhängig von  $A$  ist:  $n_\infty = 0,17$  Nukleon/ $\text{fm}^3$ , was zum oben angegebenen Wert von  $\rho_\infty(Z, A)$  [s. unten Gl. (I.19)] führt.  $n_\infty$  wird *Sättigungsdichte* genannt.

**Bemerkung:** Da die Masse eines Nukleons etwa  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg beträgt, vgl. Abschn. I.5.2 und I.5.3, entspricht  $n_\infty$  einer Massendichte von  $2,8 \cdot 10^{17}$   $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 1.2.4 d Weitere Bemerkungen

In diesem Abschnitt wurden (beinahe) sphärische Atomkerne betrachtet, entsprechend der angenommenen Kugelsymmetrie der Dichteverteilungen (I.18), (I.19) oder (I.20), die nur von  $r = |\vec{r}|$  abhängen. Manche Nuklide sind aber „deformiert“, sogar im Grundzustand, was bedeutet, dass ihre Gestalt stark von derjenigen einer Kugel abweicht. Experimentell spiegeln sich solche Abweichungen von der Kugelsymmetrie in Momenten der Ladungsdichteverteilung wider (§ I.4.3 a).

Die oben beschriebene Methode zur Messung der (Ladungs-)Dichteverteilung eines Kerns mit Hilfe von Streuexperimenten beruht stillschweigend auf der Annahme, dass der zu messende Atomkern lange genug lebt, um als Ziel benutzt zu werden. Bei manchen Nukliden ist diese Annahme nicht erfüllt, insbesondere bei denjenigen, die in der Nähe der Grenzen des Stabilitätsbereichs liegen.

Solche Kerne, wenn sie sehr neutronenreich bzw. protonenreich sind, besitzen manchmal seltene Zerfallsarten durch die gleichzeitige Emission zweier Neutronen bzw. Protonen (§ III.3.5 a). Durch eine sorgfältige Analyse der gemessenen Kinematik der Zerfallsprodukte kann Information über die Struktur des zerfallenden Kerns gewonnen werden. Somit wurde bei einigen Kernen ungewöhnlich langreichweitige Dichteverteilungen entdeckt: dabei bewegen sich ein paar Neutronen bzw. Protonen im Mittel sehr weit vom Kernzentrum — sollte man schreiben, weit vom Kern des Atomkerns? — und bilden somit eine Art „Halo“ um den Rest der Nukleonen [20]. Beispiele solcher sog. *Halo-Kerne* sind  ${}^6_3\text{Li}$  (Halo aus zwei Neutronen) oder  ${}^8_5\text{B}$  (Halo aus einem einzelnen Proton).

In der Kernphysik sind Dichteverteilungen, wie die Wirkungsquerschnitte, statistische Größen, gewonnen aus der Wiederholung vieler identischer Experimente. Dementsprechend können sie als (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen interpretiert werden: die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Nukleon im Volumenelement  $d^3\vec{r}$  um den Punkt  $\vec{r}$  befindet, ist proportional<sup>(10)</sup> zum Produkt  $n(\vec{r}) d^3\vec{r}$ , mit  $n$  der Nukleonendichteverteilung im Kern. In Übereinstimmung mit dieser Interpretation ist  $n(\vec{r})$  in quantenmechanischen Modellierungen des Atomkerns proportional zum Betragsquadrat der Wellenfunktion der  $A$  Nukleonen des Kerns.

Im Gegensatz ist die eigentliche Verteilung der Nukleonen in einem gegebenen Kern zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht durch  $n(\vec{r})$  gegeben, sondern durch die Summe über alle Nukleonen von  $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ -Termen, wobei  $\vec{r}_i(t)$  die Position zur Zeit  $t$  des  $i$ -ten Nukleons bezeichnet.

## 1.3 Masse des Atomkerns

Eine zweite Grundeigenschaft von Atomkernen, neben ihrer Größe, ist ihre Masse, deren Messung für eine gegebene relative Genauigkeit in der Tat einfacher ist. Eigentlich spielt die Masse des Kerns schon eine Rolle in der Bestimmung des Radius, denn sie legt die reduzierte Masse für das äquivalente Ein-Körper-Problem für die Streuung eines Projektils am Kern fest. Dazu stellt sich die Masse als wichtig heraus, weil sie Auskunft über die Stabilität des Nuklids gibt.

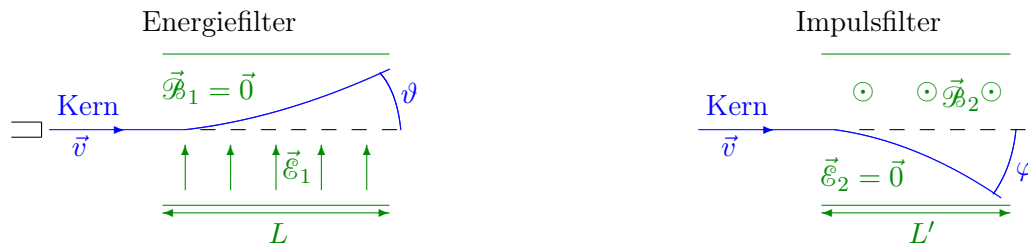
<sup>(10)</sup>Der Proportionalitätsfaktor ist einfach  $1/A$ , denn  $n(\vec{r})$  ist auf die Nukleonenzahl  $A$  des Kerns normiert.

**Bemerkung:** Hiernach bezeichnet  $m(Z, N)$  bzw.  $m(Z, A)$  die Masse der „nackten“ Atomkernen, d.h. von völlig ionisierten Atomen. In manchen Lehrbüchern wird an deren Stelle die Masse  $m'(Z, A)$  des Atoms, einschließlich der  $Z$  Elektronen, verwendet. Dies führt zu einigen Unterschieden, die im Folgenden rechtzeitig diskutiert werden.

### I.3.1 Grundlagen der Massenmessung

Die ersten Messungen der Masse des Atomkerns fanden parallel zu dessen Nachweis statt und führten schnell zur Entdeckung der Existenz von Isotopen (J. J. Thomson 1912) und zu ihrer systematischen Untersuchung (Aston 1919, vgl. Experiment 9 in Ref. [7]).

Die meisten frühen Methoden zur Massenbestimmung berühren auf demselben einfachen Grundprinzip, das in mehreren Messapparaten — Massenspektrometer bzw. Massenspektrographen — implementiert wurden, insbesondere durch Mattauch.<sup>(11)</sup> Dabei fliegt der Kern durch zwei aufeinanderfolgende Filter, die seine kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  (Energiefilter) und seinen Impuls  $|\vec{p}|$  (Impulsfilter) präzise auswählen, wie unten schematisch dargestellt wird. Dann wird die Masse einfach durch  $m = |\vec{p}|^2/2E_{\text{kin}}$  — im nicht-relativistischen Fall — gegeben (vgl. Experiment 26 in Ref. [7]).



Der Ablenkwinkel  $\vartheta$  der Flugrichtung des Kerns (Ladung  $q$ ) am Ausgang des Gebiets (Länge  $L$ , gleichmäßiges elektrisches Feld  $\vec{E}_1$ , verschwindendes magnetisches Feld  $\vec{B}_1$ ) ist gegeben durch

$$\tan \vartheta = \frac{q\mathcal{E}_1 L}{2mv^2} = \frac{q\mathcal{E}_1 L}{4E_{\text{kin}}}.$$

Der Ablenkwinkel  $\varphi$  am Ausgang des Gebiets (Länge  $L'$ , elektrisches Feld  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ , gleichmäßiges magnetisches Feld  $\vec{B}_2$ ) ist gegeben durch

$$\sin \varphi = \frac{q\mathcal{B}_2 L'}{mv} = \frac{q\mathcal{B}_2 L'}{|\vec{p}|}.$$

Mit solchen Methoden werden relative Genauigkeiten von etwa  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  erreicht. Genauere Messungen sind mit sog. *Flugzeitmassenspektrometern* nötig; dabei werden die Kerne in einem Bereich (Länge  $L$ ) durch eine konstante Spannung beschleunigt, und die Zeit zum Durchlaufen des Gebiets liefert das Masse-zu-Ladung-Verhältnis  $m/q$ .

Um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen sind andere Messmethoden nötig [22], wie z.B. die Verwendung einer Penning-Falle (vgl. Ref. [23] und das darin enthaltene Literaturverzeichnis).

### I.3.2 Bindungsenergie

Die Masse eines Nuklids mit  $A$  Nukleonen ist ungefähr proportional zu  $A$  — was die Bezeichnung „Massenzahl“ rechtfertigt —, entsprechend den fast gleichen Massen von Proton und Neutron (vgl. Abschn. I.5.2 und I.5.3).

Genauer ist die Masse  $m(Z, N)$  eines *gebundenen* Atomkerns mit  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen immer kleiner als die Summe der Massen seiner Bausteine:

$$m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - \Delta m(Z, N), \quad (\text{I.21})$$

wobei  $m_p$  bzw.  $m_n$  die Masse des Protons bzw. Neutrons bezeichnet und  $\Delta m(Z, N) > 0$  der sog. *Massendefekt* ist. Indem die Neutronenzahl  $N$  durch  $A - Z$  ersetzt wird, erhält man die alternative

<sup>(11)</sup>Vgl. Ref. [21, Kap. 3] für einen Überblick über verschiedene Methoden und die entsprechenden Messapparate.

Schreibweise

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m(Z, A). \quad (\text{I.22})$$

Ausgehend vom Massendefekt ist die *Bindungsenergie* des Kerns definiert durch

$$B(Z, A) \equiv \Delta m(Z, A) c^2. \quad (\text{I.23})$$

$B(Z, A)$  stellt die Energie dar, die freigesetzt wird, als die den Kern bildenden Nukleonen zu einem gebundenen Zustand „kondensieren“. Deshalb gewährt sie Einsicht in die Stabilität der aus Nukleonen bestehenden Zustände. Somit ist ein aus festen Protonen- bzw. Neutronenzahlen  $Z$  bzw.  $N = A - Z$  bestehender Zustand umso stabiler, je größer die zugehörige freigesetzte Energie  $B(Z, A)$  ist.

Sei z.B. angenommen, dass mehr Energie freigesetzt wird, wenn  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen die zwei Kerne  $(Z_1, N_1)$  und  $(Z_2 = Z - Z_1, N_2 = N - N_1)$  bilden, als wenn sie das einzige Nuklid  $(Z, N)$  bilden: dann ist  $m(Z_1, N_1) + m(Z_2, N_2) < m(Z, N)$ , d.h.  $B(Z_1, N_1) + B(Z_2, N_2)$  ist größer als  $B(Z, N)$ . Dementsprechend ist der Zerfall des größeren Nuklids  $(Z, N)$  in die zwei leichteren energetisch bevorzugt.

**Bemerkung:** Wenn man nicht die Kernmasse  $m(Z, A)$ , sondern die Atommasse  $m'(Z, A)$  betrachtet, dann tragen neben die Massen und Bindungsenergie der Nukleonen auch solche der Elektronen bei:

$$m'(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B(Z, A)}{c^2} + Zm_e - \frac{B_e(Z, A)}{c^2}, \quad (\text{I.24})$$

mit  $m_e$  der Elektronenmasse und  $B_e(Z, A)$  der Bindungsenergie der Elektronenhülle.

### Bindungsenergie pro Nukleon $B/A$

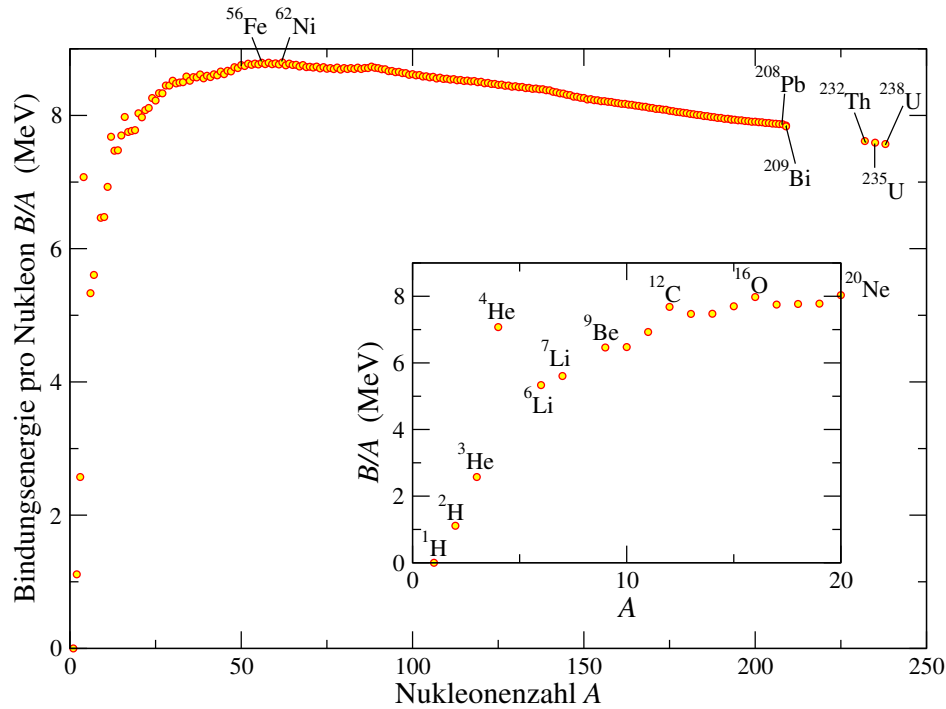
Viele Eigenschaften der bekannten Nuklide, insbesondere ihre Massen und Bindungsenergien pro Nukleon, werden in Ref. [24] zusammengestellt. In Abb. I.10 ist die Bindungsenergie pro Nukleon  $B(Z, A)/A$  gegen die Massenzahl  $A$  aufgetragen für verschiedene gegenüber  $\beta$ -Zerfall stabile Kerne. Genauer handelt es sich dabei um die Kerne mit der kleinsten Masse  $m(Z, A)$  — entsprechend in guter Näherung der größten  $B(Z, A)/A$  — in der zugehörigen Isobarenreihe, vgl. § II.2.2 a. Drei Haupteigenschaften tauchen auf:

- Die Größenordnung der Bindungsenergie pro Nukleon ist etwa 5–10 MeV, d.h.  $B(Z, A)$  beträgt ungefähr 0,5–1% der Kernmasse.  
Die typische Bindungsenergie ist somit um einen Faktor  $10^4$ – $10^6$  größer als in der Atomphysik, weshalb kernphysikalische Prozesse viel mehr Energie freisetzen können als chemische Reaktionen.
- Bei den leichten Kernen mit  $A < 10$  ist  $B(Z, A)/A$  annähernd proportional zu  $A - 1$  — bis auf einer bemerkenswerten Spitze bei  ${}^4_2\text{He}$ , entsprechend der besonderen Stabilität dieses Kerns.
- Andererseits bleibt die Bindungsenergie pro Nukleon näherungsweise konstant für  $A \geq 20$ :  $B/A \approx 7,5 - 8,5$  MeV.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich wichtige Informationen über die Kernkräfte erhalten, die für die Kohäsion des Kerns verantwortlich sind. Insbesondere besitzen diese Kräfte eine *Sättigung*-Eigenschaft [25].

Den  $A$  Nukleonen entsprechen nämlich  $A(A - 1)/2$  Nukleon–Nukleon Paare, d.h. mutmaßlich  $A(A - 1)/2$  Nukleon–Nukleon Bindungen. Wenn die Erzeugung jeder dieser  $N$ – $N$ -Bindungen die gleiche Energie freisetzt, wächst die gesamte Bindungsenergie  $B(Z, A)$  linear mit deren Anzahl, d.h. sie ist annähernd proportional zu  $A^2$ . Das ist tatsächlich was bei Kernen mit wenigen Nukleonen beobachtet wird. Bei schwereren Atomkernen bindet sich aber jedes Nukleon nicht mit allen anderen, sondern nur mit einer kleinen Anzahl davon (möglicherweise mit nur einem einzelnen Partner), sodass  $B(Z, A)$  proportional zu  $A$  wird. Es sieht so aus, als ob die Bindungsfähigkeit des Nukleons nach ein paar Bindungen gesättigt wäre.





**Abbildung I.10** – Bindungsenergie pro Nukleon  $B/A$  verschiedener Kerne (Daten aus Ref. [24]). In jeder Isobarenreihe wird nur der gegenüber  $\beta$ -Zerfall stabile Kern mit der höchsten  $B/A$  dargestellt, vorausgesetzt seine mittlere Lebensdauer gegenüber  $\alpha$ -Zerfall bzw. spontane Spaltung größer als  $10^{15}$  s ist. (Zerfälle werden nur für  $^{209}\text{Bi}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  beobachtet.)

Diese Sättigungseigenschaft erinnert an die analoge Eigenschaft der möglichen Bindungen eines chemischen Elements: z.B. kann ein Kohlenstoff-Atom nur vier Bindungen eingehen, weil es auf der Valenzschale vier ungepaarte Elektronen besitzt, die mit anderen Atomen können ausgetauscht werden. Analog kann aus der beobachteten Sättigung der Kernkräfte hergeleitet werden, dass diese Kräfte durch den Austausch eines Teilchens zwischen *zwei* Partnern vermittelt werden [25, 26]. Mehr später über Kernkräfte!

### I.3.3 Separationsenergien

Ausgehend von den Kernmassen wird die *Separationsenergie*  $S_n(Z, N)$  bzw.  $S_p(Z, N)$  für die Abspaltung eines Neutrons bzw. eines Protons definiert:

$$S_n(Z, N) \equiv [m(Z, N - 1) + m_n - m(Z, N)]c^2, \quad (\text{I.25a})$$

$$S_p(Z, N) \equiv [m(Z - 1, N) + m_p - m(Z, N)]c^2. \quad (\text{I.25b})$$

$S_n$  bzw.  $S_p$  ist die zu zuführende Energie, um ein Neutron bzw. ein Proton aus dem Kern freizusetzen: somit ist die Separationsenergie analog zur Ionisierungsenergie der Atome.

Eine positive Separationsenergie  $S_n$  bzw.  $S_p$  bedeutet, dass es energetisch günstiger ist, den Kern  $(Z, N)$  zu bilden, als den Zustand mit einerseits dem Nuklid  $(Z, N - 1)$  bzw.  $(Z - 1, N)$  und andererseits einem freien Neutron bzw. Proton. Umgekehrt ist ein Zustand mit negativer  $S_n$  bzw.  $S_p$  nicht gebunden und wird spontan ein Neutron bzw. ein Proton verlieren: in der  $(N - Z)$ -Ebene begrenzen die Linien  $S_n = 0$  und  $S_p = 0$  (die sog. Neutron- und Proton-*drip lines*) das Gebiet der gebundenen Zustände.

Die Separationsenergien (I.25) lassen sich durch die entsprechenden Bindungsenergien leicht ausdrücken:

$$S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 1), \quad (\text{I.26a})$$

$$S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N). \quad (\text{I.26b})$$

Analog zu den Separationsenergien  $S_n$ ,  $S_p$  definiert man die Separationsenergien  $S_\alpha$  für die Abspaltung eines  $\alpha$ -Teilchens, oder  $S_{2n}$  bzw.  $S_{2p}$  für die Abspaltung zweier Neutronen bzw. Protonen. Diesen Größen werden wir in Kap. III wieder begegnen.

## I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns

Nuklide besitzen noch weitere Charakteristika, die nur nicht-triviale Werte annehmen, wenn der Kern nicht kugelsymmetrisch ist. Teilweise haben diese Eigenschaften kein klassisches Pendant, weshalb sie hier etwas missbräuchlich als „quantenmechanisch“ gekennzeichnet werden.

### I.4.1 Spin

Als *Spin* bezeichnet man im engeren Sinn den Drehimpuls eines Körpers in seinem eigenen Ruhesystem — d.h. in einem Bezugssystem, wo der Bahndrehimpuls  $\vec{r} \times \vec{p}$  verschwindet.<sup>(12)</sup>

Die Bausteine des Kerns — Protonen und Neutronen — sind Teilchen mit dem Spin  $\frac{1}{2}$ , entsprechend Drehimpulsen  $\vec{S}_i$ . Dazu bewegt sich jedes Nukleon im Inneren des Nuklids und besitzt daher einen Bahndrehimpuls  $\vec{L}_i$  um das Kernzentrum, auch im Ruhesystem des Kerns. Die Kopplung aller individuellen Nukleonenspins und -bahndrehimpulse führt zu einem gesamten Drehimpuls  $\vec{J}_{\text{Kern}}$  (oder oft  $\vec{I}$ ) im Ruhesystem des Kerns, der auch als *Kernspin* oder Spin des Kerns bezeichnet wird. Insbesondere besitzen Atomkerne mit einer ungeraden Nukleonenzahl  $A$  automatisch einen halbzahligen Spin.

Die Existenz eines nicht-verschwindenden Kernspins signalisiert eine Abweichung von der Kugelsymmetrie des Atomkerns, so dass die (Ladungs)Dichteverteilung nicht mehr durch die einfache Woods–Saxon-Verteilung (I.19)–(I.20) gegeben ist.

Der Kernspin trägt zum gesamten Drehimpuls eines Systems bei, der in jedem Typ von Prozess eine erhaltene Größe ist.

Experimentell kann der Kernspin durch die Hyperfeinausspaltung der Spektrallinien der Atomhülle in einem Magnetfeld ermittelt werden, vgl. Experimente 54–56 in Ref. [8].

### I.4.2 Parität

Eine andere wichtige Eigenschaft von Atomkernen ist ihre Parität  $P$  (oder manchmal  $\Pi$ ). Dabei handelt es sich um die multiplikative Quantenzahl, die das Verhalten der Wellenfunktion unter die Raumspiegelungstransformation  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  charakterisiert. Kerne sind Eigenzustände des entsprechenden Operators und besitzen somit eine bestimmte Parität, entweder positiv (Eigenwert  $+1$ ) oder negativ ( $-1$ ).

Eine übliche Notation fasst Spin und Parität zusammen:  $J_{\text{Kern}}^P$ , wobei die Parität mit  $+$  oder  $-$  bezeichnet wird.

Die Parität eines Systems ist in den meisten Elementarprozessen eine erhaltene Größe, mit der einzigen doch wichtigen Ausnahme der durch die schwache Wechselwirkung vermittelten Prozesse (vgl. Abschn. III.3.3).

<sup>(12)</sup>Die quantenmechanische Behandlung des Drehimpulses wird kurz im Anhang ?? dargestellt.

### I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente

#### I.4.3a Elektrische Momente

Bei Kernen mit einem nicht-verschwindenden Kernspin definiert dieser eine bevorzugte Richtung und verletzt daher automatisch die Kugelsymmetrie.

Um die Abweichung der elektrischen Ladungsdichteverteilung  $\rho_{\text{el}}$  von der Kugelgestalt werden ihre *elektrische Multipolmomente* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [27, Kap. 4]). Die Verteilung erzeugt an einem Aufpunkt M im Abstand  $|\vec{X}|$  von ihrem Schwerpunkt ein elektrostatisches Potential  $\Phi(\vec{X})$ , das mithilfe dieser Momente als Summe verschiedener Terme geschrieben werden kann (damit die höheren Terme der Entwicklung vernachlässigbar sind, muss  $|\vec{X}|$  viel größer als die Ausdehnung der Verteilung sein):

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{X}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{D} \cdot \vec{X}}{|\vec{X}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij} X_i X_j}{|\vec{X}|^5} + \dots, \quad (\text{I.27})$$

wobei die  $X_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  die kartesischen Koordinaten des Punkts M bezüglich eines Systems mit dem Verteilungsschwerpunkt als Ursprungspunkt bezeichnen. In Gl. (I.27) ist  $Q$  die gesamte elektrische Ladung der Verteilung, während der Vektor  $\vec{D}$  bzw. der (spurlose) Tensor zweiter Stufe  $Q_{ij}$  das elektrische Dipol- bzw. Quadrupolmoment ist. Diese werden jeweils gegeben durch

$$\vec{D} = \int \vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (\text{I.28})$$

und

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}) \rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (\text{I.29})$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist:  $\delta_{ij} = 1$  wenn  $i = j$ , 0 sonst.

Der Ausdruck (I.27) des Potentials ergibt sich sofort aus dem Integral der Taylor-Entwicklung der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) \equiv [(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2]^{-1/2} = 1/|\vec{X} - \vec{x}|$  in der Nähe des Ursprungspunkts  $\vec{x} = \vec{0}$ :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{0}) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial f(\vec{0})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} \frac{\partial^2 f(\vec{0})}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \\ &= \frac{1}{|\vec{X}|} + \frac{1}{|\vec{X}|^3} \sum_{i=1}^3 x_i X_i + \frac{1}{|\vec{X}|^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} [3X_i X_j - \vec{X}^2 \delta_{ij}] + \dots, \end{aligned}$$

zusammen mit der Beziehung  $\sum_{i,j} x_i x_j \vec{X}^2 \delta_{ij} = \sum_{i,j} X_i X_j \vec{x}^2 \delta_{ij}$ .

Auf den Ausdrücken (I.28)–(I.29) kann man leicht prüfen, dass die elektrischen Dipol- und Quadrupolmomente von sphärischen Kernen verschwinden. In §II.4.4c wird allgemeiner gezeigt, dass Kerne wegen ihrer wohldefinierten Parität kein elektrisches Dipolmoment besitzen. Sie können aber noch ein Quadrupolmoment haben, so dass das Letztere die einfachste Abweichung von der Kugelgestalt der Dichteverteilung parametrisiert.

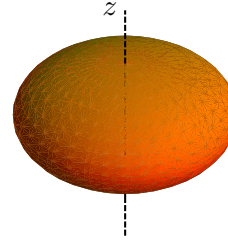
Es sei jetzt ein Kern mit einem nicht-verschwindenden Spin  $\vec{J}_{\text{Kern}}$ ; die Richtung dieses Spins definiert die  $z$ -Achse. Die  $zz$ -Komponente des elektrischen Quadrupolmoments  $Q_{zz}$  bestimmt die Deformation des Kerns entlang dieser Achse.<sup>(13)</sup> Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, je nach dem Vorzeichen von  $Q_{zz}$ :

<sup>(13)</sup> Wenn die Gestalt des Kerns durch ein Umdrehungsellipsoid dargestellt wird, ist diese  $z$ -Achse eine der Hauptachsen des Ellipsoids. Im Hauptachsensystem verschwinden dann die nicht-diagonalen Komponenten des elektrischen Quadrupolmoments, während  $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$ .

$Q_{zz} > 0$ : prolater Kern (= zigarrenförmig)



$Q_{zz} < 0$ : oblater Kern (= linsenförmig)



### 1.4.3b Magnetisches Dipolmoment

In der klassischen Elektrodynamik erzeugt eine rotierende elektrische Ladung — z.B. in einer Stromschleife — ein magnetisches Feld gleich dem eines magnetischen Dipols  $\vec{\mu}$ . Ähnlich wird in der Quantenmechanik mit der Rotation einer Ladung — genauer, mit dem zugehörigen Bahndrehimpulsoperator  $\hat{L}$  — ein magnetisches Dipolmoment  $\hat{\mu}_L$  assoziiert, das proportional zu  $\hat{L}$  ist.

Neben dem Bahndrehimpuls existiert in der Quantenmechanik ein weiterer Drehimpuls, und zwar der Spin  $\hat{S}$ , zu welchem ebenfalls ein magnetisches Dipolmoment  $\hat{\mu}_S$  zugeordnet wird. Das gesamte magnetische Dipolmoment wird dann durch die Kopplung von  $\hat{\mu}_L$  und  $\hat{\mu}_S$  gegeben:

$$\hat{\mu} \equiv \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S. \quad (\text{I.30})$$

Die typische Größenordnung eines Drehimpulses bzw. eines magnetischen Dipolmoments in der Kernphysik ist  $\hbar$  bzw. das sog. *Kernmagneton*

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV} \cdot \text{T}^{-1}, \quad (\text{I.31})$$

wobei  $e$  bzw.  $m_p$  die Elementarladung bzw. die Masse des Protons bezeichnet.  $\mu_N$  ist gleich dem Wert des magnetischen Dipolmoments für ein mit dem Drehimpuls  $\hbar$  rotierendes Proton bei klassischer Rechnung.

Mithilfe des Kernmagnetons lassen sich die mit dem Bahndrehimpuls und dem Spin assoziierten magnetischen Dipolmomente als

$$\hat{\mu}_L \equiv g_L \mu_N \frac{\hat{L}}{\hbar}, \quad \hat{\mu}_S \equiv g_S \mu_N \frac{\hat{S}}{\hbar} \quad (\text{I.32})$$

schreiben, wobei die *Landé-Faktoren*  $g_L$  und  $g_S$  Zahlen von der Größenordnung 1 sind.

Im allgemeinen Fall ist  $g_L \neq g_S$ , sodass das magnetische Dipolmoment  $\hat{\mu}$  nicht parallel zum Gesamtdrehimpuls  $\hat{J} \equiv \hat{L} + \hat{S}$  ist. Wichtig ist aber nur die Komponente des Dipolmoments entlang der Richtung von  $\hat{J}$ . Im Fall eines Atomkerns ist somit der (messbare) Wert  $\mu_{\text{Kern}}$  des magnetischen Dipolmoments durch die Gleichung

$$\langle \hat{\mu} \cdot \hat{J}_{\text{Kern}} \rangle \equiv \mu_{\text{Kern}} \frac{\langle \hat{J}_{\text{Kern}}^2 \rangle}{j\hbar} = \mu_{\text{Kern}}(j+1)\hbar. \quad (\text{I.33})$$

definiert. Dabei ist  $j$  die mit dem Betragsquadrat  $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$  des Gesamtdrehimpulses assoziierten Quantenzahl (vgl. Anhang ??), während  $\langle \cdot \rangle$  den Erwartungswert von Operatoren bezeichnet.

Die Begründung der auf erster Sicht überraschenden Definition (I.33) ist, dass nur die Projektion von  $\hat{\mu}$  auf  $\hat{J}_{\text{Kern}}$  beobachtbar ist.

In der Tat bleibt der Erwartungswert von  $\hat{\mu}$  nicht konstant in der Bewegung, sondern nur der von  $\hat{J}_{\text{Kern}}$ . Genauer sind das Betragsquadrat  $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$  und die Komponente  $\hat{J}_{\text{Kern},z}$  entlang einer

Richtung — konventionell der  $z$ -Achse — Operatoren, die mit dem Hamilton-Operator des Kerns kommutieren, so dass die zugehörigen Erwartungswerte Erhaltungsgrößen sind. Daher kann nur die  $z$ -Komponente  $\hat{\mu}_z$  von Relevanz sein.

Manchmal wird anstatt Gl. (I.33) einfacher

$$\langle \hat{\mu}_z \rangle \equiv \mu_{\text{Kern}} \frac{\langle \hat{J}_{\text{Kern},z} \rangle}{j\hbar}, \quad (\text{I.34})$$

geschrieben, mit  $j$  der mit  $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$  assoziierten Quantenzahl, woraus sich in Analogie mit Gl. (I.32)  $\mu_{\text{Kern}} = g_{\text{Kern}} \mu_N j$  ergibt. Eigentlich muss aber der Erwartungswert im Zähler von Gl. (I.34) für den Zustand mit maximaler „magnetischer“ Quantenzahl  $m_j = j$  betrachtet werden, damit die Gleichung wirklich äquivalent zur Definition (I.33) sei.

### Kernspinresonanz

In Gegenwart eines Magnetfelds  $\vec{\mathcal{B}}_0$  liegt der Kernspin  $\vec{J}_{\text{Kern}}$  längs der Richtung des Felds. Die magnetische potentielle Energie des Kerns ist dann durch den Erwartungswert von  $-\hat{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0$  gegeben, d.h. laut Gl. (I.33) für einen Zustand mit der magnetischen Quantenzahl  $m_j$ , wobei  $-j \leq m_j \leq j$ , durch

$$E_{\text{mag.}} = -\langle \hat{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 \rangle = -\mu_{\text{Kern}} \frac{m_j}{j} |\vec{\mathcal{B}}_0|.$$

Im Magnetfeld gibt es somit  $2j + 1$  äquidistante Energieniveaus, zwischen denen ein senkrechtes zu  $\vec{\mathcal{B}}_0$  oszillierendes Magnetfeld  $\vec{B}_1$  periodische Übergänge induzieren kann, vorausgesetzt dessen Frequenz  $\omega$  genau abgestimmt ist, und zwar für den Übergang zwischen zwei Nachbarniveaus, auf der *Larmor-Frequenz*  $\nu_L = \omega_L / (2\pi)$  mit

$$\omega_L = \frac{\mu_{\text{Kern}} |\vec{\mathcal{B}}_0|}{j\hbar}. \quad (\text{I.35})$$

Bei dieser (Kreis)Frequenz findet in der Übergangswahrscheinlichkeit eine Resonanz statt,<sup>(14)</sup> die sog. *Kernspinresonanz*, die viele Anwendungen in der Physik, der Chemie und der Biologie hat, wie z.B.:

- präzise Bestimmungen des Werts des magnetischen Dipolmoments in einem bekannten Magnetfeld  $\vec{\mathcal{B}}_0$  (I. Rabi 1938; F. Bloch & E. M. Purcell 1946);
- bei bekanntem  $\mu_{\text{Kern}}$ , präzise Messungen des Magnetfelds  $|\vec{\mathcal{B}}_0|$ , um welches der Kern präzediert, und dadurch Ermittlung dessen Umgebung (chemische Bindungen und Zusammensetzung): dabei handelt es sich um das Grundprinzip der *Kernspintomographie* bzw. *Magnetresonanztomographie* als zerstörungsfreies bildgebendes Verfahren in der Medizin (P. Lauterbur 1971; P. Mansfield).

## I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne

In diesem letzten Abschnitt werden zunächst einige Einheiten, danach die Charakteristika der leichtesten Kerne zusammengefasst.

### I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik

Die Einheiten des SI-Systems sind nicht sehr geeignet, um die mikroskopischen Größen der Kernphysik günstig zu beschreiben. Daher werden entweder eher Teile davon benutzt, oder sogar andere Einheiten verwendet. Hiernach werden einige davon zusammengefasst.

- Länge:  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \equiv 1 \text{ Fermi}$  ( $\sim$  Radius des Protons).  
Dementsprechend sind typische Flächen bzw. Volumina der Ordnung ein paar  $\text{fm}^2$  bzw.  $\text{fm}^3$ ; für Wirkungsquerschnitte werden das Barn ( $1 \text{ b} \equiv 100 \text{ fm}^2$ ) und seine Teile benutzt.

<sup>(14)</sup> Im klassischen Bild ist dies die Frequenz der Präzession des magnetischen Dipolmoments  $\vec{\mu}$  um die Richtung des Magnetfelds  $\vec{\mathcal{B}}_0$ .

- Zeit: manchmal wird das  $\text{fm}/c$  für sehr kurze Zeitdauer benutzt ( $1 \text{ fm}/c = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ ), mit  $c$  der Vakuumlichtgeschwindigkeit.
- Energie:  $1 \text{ MeV} \equiv 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$  (typische Energie, die in einem kernphysikalischen Prozess ausgetauscht wird).
- Masse: wird entweder in  $\text{MeV}/c^2$  bzw.  $\text{GeV}/c^2$  ausgedrückt, mit  $1 \text{ MeV}/c^2 = 1,783 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$  (Masse des Elektrons  $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ ), oder in *atomaren Masseneinheiten*<sup>(15)</sup>  $u$ , wobei

$$1 u \equiv \frac{\frac{1}{12} M(^{12}\text{C})}{\mathcal{N}_A} = \frac{1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931,49 \text{ MeV}/c^2$$

mit  $M$  der molaren Masse und  $\mathcal{N}_A$  der Avogadro-Zahl.

Bis 1960, und somit in älteren Artikeln bzw. Lehrbüchern, war die atomare Einheit definiert durch  $1 \text{ amu} \equiv \frac{1}{16} M(^{16}\text{O})/\mathcal{N}_A$ .

- Elektrische Ladungen werden in Einheiten der Elementarladung  $e$  gegeben. Dann wird das elektrische Quadrupolmoment (Ladung  $\times$  Fläche) eines Kerns in  $e$  barns gemessen. Schließlich werden magnetische Dipolmomente in Einheiten des Kernmagnetons  $\mu_N$  angegeben.

Mithilfe dieser Einheiten beträgt das Produkt  $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ , d.h.  $1 \text{ fm} = \hbar c / (197 \text{ MeV})$ .

Dieser Umrechnungsfaktor ist interessant aus (mindestens) zwei Gründen: Erstens sind potentielle elektrostatischen Energien der Form  $qq'/(4\pi\epsilon_0 r) = \alpha\hbar c/r$  mit  $\alpha \simeq 1/137$  der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante. Sind die Ladungen  $q, q'$  ausgedrückt in Einheiten von  $e$  und der Abstand  $r$  in fm, dann findet man einfach die Energie in MeV. Zweitens ist der Faktor nützlich, wenn man das System „natürlicher Einheiten“ mit  $\hbar = c = 1$  benutzt, in welchem Masse und Energie bzw. Länge und Zeit in MeV (oder GeV) bzw  $\text{MeV}^{-1}$  ( $\text{GeV}^{-1}$ ) gemessen werden.

### 1.5.2 $Z = 1, N = 0$ : Proton ( $p$ )

Das Proton, mit Masse  $m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2 = 1,0073 u$ , bildet den Kern des leichtesten Wasserstoff-Isotops  $^1\text{H}$ . Rutherford erkannte 1917, dass der  $^1\text{H}$ -Kern auch in anderen Atomkernen vorhanden ist, entsprechend der konventionellen „Entdeckung“ des Protons.

Dem heutigen Wissen nach ist das Proton stabil, was bedeutet, dass kein Zerfall bisher experimentell beobachtet wurde. Genauer beträgt die untere Grenze über dessen mittlere Lebensdauer  $T_{1/2} > 2,1 \cdot 10^{29}$  Jahre mit der Aussagewahrscheinlichkeit (confidence level, CL) 90% [28].

Das Proton hat den Spin  $\frac{1}{2}$  und eine (definitionsgemäß) positive Parität:  $J^P(p) = \frac{1}{2}^+$ .

Es hat kein messbares elektrisches Quadrupolmoment, während sein magnetisches Dipolmoment  $\mu_p = +2,79\mu_N$  ist. Das Letztere entspricht einem Landé-Faktor  $g_S = 5,59$  [Gl. (I.32)] sowie einer Larmor-Frequenz  $\nu_L = 42,7 \text{ MHz} \cdot \text{T}^{-1}$  [vgl. Gl. (I.35) mit  $|\vec{\mathcal{B}}_0| = 1 \text{ T}, j = \frac{1}{2}$ ].

Wenn das Proton ein Elementarteilchen wäre, dann sollte er der Pauli-Theorie nach das magnetische Dipolmoment  $\mu_p = \mu_N$  haben, d.h.  $g_S = 2$ . Die große Abweichung von  $g_S(p)$  von 2 zeigt, dass das Proton nicht elementar ist — was durch andere Beobachtungen bestätigt ist: eigentlich besteht ein Proton aus Quarks und Gluonen, davon 3 Valenzquarks ( $u, u, d$ ).

Zum Spin bzw. magnetischen Dipolmoment des Protons tragen die Spins und Bahndrehimpulse bzw. die magnetischen Dipolmomente seiner Bestandteile bei. Ob der Spin des Protons mithilfe derjenigen seiner Bestandteile quantitativ erklärt werden kann, ist noch umstritten.

<sup>(15)</sup>Relative Unsicherheiten über die Masse sind wegen der Messmethoden oft kleiner wenn ausgedrückt in atomaren Masseneinheiten.

### 1.5.3 $Z = 0, N = 1$ : Neutron ( $n$ )

Der andere Bestandteil von Atomkernen, das elektrisch neutrale Neutron, wurde 1932 durch J. Chadwick entdeckt [7, Experiment 11]. Seine Masse ist  $m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2 = 1,0087 \text{ u}$ .

Im Gegensatz zum Proton ist das freie Neutron nicht stabil, sondern es zerfällt durch  $\beta^-$ -Radioaktivität<sup>(16)</sup>

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\text{I.36})$$

mit der mittleren Lebensdauer  $\tau_n = 880,3 \pm 1,1 \text{ s}$ .

#### Bemerkungen:

\* Da das Neutron keine elektrische Ladung trägt, kann seine Masse mit keiner der in Abschn. I.3.1 erwähnten Methoden gemessen werden. Stattdessen lässt sich  $m_n$  aus Messungen der Masse  $m_d$  und der Bindungsenergie  $B(d)$  des Deuterons (s. unten) gewinnen:  $m_n = m_d - m_p + B(d)/c^2$ .

\* Die mittlere Lebensdauer des freien Neutrons ist nicht gut bekannt: die oben angegebene relative Messunsicherheit beträgt 0,1 %, während die Masse mit einer relativen Genauigkeit von weniger als  $10^{-9}$  — wenn  $m_n$  in atomaren Masseneinheiten gemessen ist — bekannt ist. Dazu tragen eigentlich zwei Gruppen von Experimenten zum angegebenen experimentellen Mittelwert von  $\tau_n$  bei: einige davon finden Werte zwischen 878,5 und etwa 882,5 s; andere finden eher 886–889 s. Eine Diskussion dieser Ergebnisse kann in der neuesten *Review of particle physics* [28, S. 1380–1381] gefunden werden.

\* Neben dem Zerfallskanal (I.36) wurde 2006 der seltene Zerfall  $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$  mit dem Verzweigungsverhältnis  $3,09 \pm 0,34 \cdot 10^{-3}$  zum ersten Mal beobachtet [29].

Das Neutron hat Spin und Parität  $J^P(n) = \frac{1}{2}^+$  und das magnetische Moment  $\mu_n = -1,91\mu_N$ .

Bemerkenswert ist, dass  $\mu_n$  endlich ist, obwohl das Neutron elektrisch neutral ist! Es besteht aber aus geladenen Quarks, davon 3 Valenzquarks ( $u, d, d$ ), deren Bahndrehimpulse zu seinem magnetischen Moment beitragen.

### 1.5.4 $Z = 1, N = 1$ : Deuteron ( ${}^2\text{H} \equiv d$ )

Ein einziger Zustand mit zwei Nukleonen ist gebunden, und sogar stabil, und zwar der Kern des durch Urey 1932 entdeckten schweren Wasserstoff-Isotops  ${}^2\text{H}$  (*Deuterium*), das Deuteron, mit Masse  $m_d = 1875,613 \text{ MeV}/c^2$ .

Dieser Kern, obzwar stabil, ist einer der einzigen Atomkerne ohne gebundenen angeregten Zustand: jede Energiezufuhr hat entweder keinen Einfluss — so lange  $E < B(d)$  — oder zerstört den Kern in seine Bestandteile. Daher kann die Bindungsenergie  $B(d) = 2,225 \text{ MeV}$  sehr präzise gemessen werden — was die Basis der Messung der Neutronenmasse bildet [7, Experiment 13]. Somit hat das Deuteron die kleinste Bindungsenergie pro Nukleon aller stabilen Kerne, wie in Abb. I.10 zu sehen ist, d.h. das Deuteron ist der gebrechlichste Kern.

Das Deuteron hat Spin und Parität  $J^P = 1^+$ , magnetisches Dipolmoment  $\mu_d = 0,857\mu_N$ , und elektrisches Quadrupolmoment  $Q = +0,002860 e \text{ barns}$ .

**Bemerkung:** Die  $A = 2$ -Zustände mit  $Z = 2, N = 0$  („Diproton“) bzw.  $Z = 0, N = 2$  („Dineutron“) sowie der Zustand mit  $Z = 1, N = 1$  und den Spin 0 sind ungebunden, und bilden daher keinen echten Kern. Diese Ergebnisse liefern Information über die Form der starken Kernkraft zwischen zwei Nukleonen.

### 1.5.5 Schwerere Kerne

Mit  $A = 3$  Nukleonen gibt es zwei gebundene Kerne, beide ohne angeregte Zustände, und zwar  ${}^3\text{H}$  (*Tritium*) und  ${}^3\text{He}$ . Beide Atomkerne haben Spin und Parität  $J^P = \frac{1}{2}^+$ , und ihre jeweiligen

<sup>(16)</sup>Auf dem Quarkniveau entspricht dieser Zerfall dem Prozess  $d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ .

Massen sind  $m(^3\text{H}) = 2808,921 \text{ MeV}/c^2$  und  $m(^3\text{He}) = 2808,391 \text{ MeV}/c^2$ . Somit ist  $^3\text{He}$  stabiler, denn  $m(^3\text{He}) < m(^3\text{H})$ , und in der Tat zerfällt  $^3\text{H}$  durch  $\beta^-$ -Zerfall in  $^3\text{He}$ , mit einer Halbwertszeit  $T_{1/2} = 12,32$  Jahre.

Es gibt einen einzigen stabilen Atomkern mit  $A = 4$  Nukleonen, den  $^4\text{He}$ -Kern, mit sowohl dem Grundzustand — entsprechend dem  $\alpha$ -Teilchen — als angeregten Zuständen. Der Grundzustand ist im Vergleich mit den Nachbarkernen besonders stabil, vgl. die Vergrößerung in Abb. I.10, und hat Spin und Parität  $J^P = 0^+$ .

Die Nuklide  $^4\text{H}$  und  $^4\text{Li}$  könnten prinzipiell auch gebunden sein, denn ihre Bindungsenergien sind positiv. Wenn er erzeugt wird, emittiert aber ein  $^4\text{H}$ - bzw.  $^4\text{Li}$ -Kern sofort — d.h. in weniger als  $10^{-15} \text{ s}$  — ein Neutron bzw. Proton, weil die in Abschn. I.3.3 eingeführte Separationsenergie  $S_n(^4\text{H})$  bzw.  $S_p(^4\text{Li})$  negativ ist.

Auf Abb. I.10 erkennt man noch, dass es kein stabiles Nuklid mit  $A = 5$  oder  $A = 8$  gibt. Bei der Erzeugung der Kerne im frühen Universum (Kap. **Nukleare Astrophysik**) haben sich diese Lücken als äußerst wichtig erwiesen. Dagegen gibt es für  $A = 6$  und  $A = 7$  stabile Lithium-Isotope, und ab  $A \geq 9$  gibt es immer mindestens ein stabiles (oder zumindest langlebiges) Nuklid bis  $A \simeq 150$ .

Aus den Bindungsenergien könnten  $^5\text{H}$ ,  $^5\text{He}$ ,  $^5\text{Li}$  und  $^5\text{Be}$  existieren, die zwei ersten bzw. letzten dieser Kerne haben aber eine negative Separationsenergie  $S_p$  für Protonen bzw.  $S_n$  für Neutronen, so dass sie eigentlich ungebunden sind.

Mit  $A = 8$  Nukleonen sind  $^8\text{He}$ ,  $^8\text{Li}$ ,  $^8\text{Be}$ ,  $^8\text{B}$  und  $^8\text{C}$  bekannt, mit positiven Bindungsenergien, alle sind aber instabil:  $^8\text{C}$  ist zu protonenreich und hat eine negative Separationsenergie für Protonen;  $^8\text{He}$ ,  $^8\text{Li}$  und  $^8\text{B}$  wandeln sich in weniger als eine Sekunde durch  $\beta$ -Radioaktivität in  $^8\text{Be}$  um, der die kleinste Masse hat und somit  $\beta$ -stabil ist. Schließlich zerfällt trotz seiner schon hohen Bindungsenergie pro Nukleon  $^8\text{Be}$  instantan in zwei  $\alpha$ -Teilchen, die noch stabiler sind.

## Literatur zum Kapitel I

- Basdevant, Rich & Spiro [1], Kap. 1.1–1.2.
- Bethge, Walter & Wiedemann [2], Kap. 2 & 3.
- Cottingham & Greenwood [3], Kap. 4.1–4.4.
- Friedmann [4], Kap. 6 & 8.5–8.6.
- Mayer-Kuckuk [5], Kap. 2.
- Povh, Rith, Scholz & Zetsche [6], Kap. 2.1–2.2 & 5.



# KAPITEL II

## Struktur von Kernen. Kernmodelle

---

II.1	Phänomenologie	27
II.2	Tröpfchenmodell	28
II.2.1	Bethe–Weizsäcker Massenformel	29
II.2.2	Stabilität im Tröpfchenmodell	30
II.2.3	Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	33
II.3	Atomkern als ideales Fermi-Gas	33
II.3.1	Ideales Fermi-Gas	34
II.3.2	Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	35
II.3.3	Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas von Protonen und Neutronen	36
II.3.4	Mögliche Verbesserungen des Modells	38
II.4	Schalenmodell des Atomkerns	39
II.4.1	Motivation für ein Schalenmodell	40
II.4.2	Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	42
II.4.3	Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	48
II.4.4	Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	51
II.4.5	Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	55

---

### II.1 Phänomenologie

- Es gibt  $\approx 250$  stabile Kerne (d.h. Kerne ohne bisherigen beobachteten Zerfall, was einer mittleren Lebensdauer  $T_{1/2} \gtrsim 10^{20}$  Jahre entspricht), davon<sup>(17)</sup>

$Z$	$N$		
gerade	gerade	148	„gg-Kerne“
ungerade	gerade	48	„ug-Kerne“
gerade	ungerade	53	„gu-Kerne“
ungerade	ungerade	5	„uu-Kerne“

Die stabilen uu-Kerne sind die leichtesten:  ${}^2_1\text{H}$  (Deuterium),  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ . Dazu ist der angeregte Zustand mit  $E^* = 77,1$  keV und  $J_{\text{Kern}} = 9^-$  vom  ${}^{180}_{73}\text{Ta}$ -Nuklide mit der Halbwertszeit  $T_{1/2} > 1,2 \cdot 10^{15}$  Jahre besonders *metastabil*.

- Sehr viele stabile Isotope für  $Z = 8, 20, 28, 50, 82$  [es gibt z.B. 10 stabile  ${}_{50}\text{Sn}$ -Isotope (Zinn)], sowie sehr viele stabile Isotone für  $N = 8, 20, 28, 50, 82, 126$ . Außerdem sind diese Nuklide (und  ${}^4_2\text{He}$ :  $Z = N = 2$ ) besonders stabil im Bezug auf ihre Nachbarn:

*magische Zahlen*

Fünf *doppelt magische Kerne* sind stabil:  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

---

<sup>(17)</sup>Referenz [24] beinhaltet eine moderne Datenbank von Kerneigenschaften, mit insbesondere dem Spin und der Parität der Kerne, sowie den Halbwertszeiten der instabilen Nuklide.

- $\approx 3000$  instabile Kerne sind heute (Ende 2021) bekannt.
- Die meisten stabilen bzw. gebundenen Kerne haben  $Z \leq N$  (die Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen wirkt destabilisierend auf protonenreiche Kerne).  
Der relative Neutronenüberschuß bzw. das Verhältnis  $N/Z$  wächst mit der Massenzahl  $A$ :  $N/Z$  nimmt von 1 bei den leichten stabilen Kernen auf 1,54 bei dem schwersten stabilen Kern  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  und 1,59 bei dem langlebigen  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .
- Bindungsenergie (vgl. § I.3.2)  $B(Z, A) \equiv [Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A)] c^2$   
Die Bindungsenergie pro Nukleon  $B(Z, A)/A$  ist in erster Näherung konstant für  $A \gtrsim 20$ :  
 $B(Z, A)/A \approx 7,5 - 8,5$  MeV (Abb. I.10).
- Aus der Systematik der gemessenen Spins und Paritäten ( $J_{\text{Kern}}^P$ ) sowie magnetischen Dipolmomenten ( $\mu$ ) und elektrischen Quadrupolmomenten ( $Q$ ) von Atomkernen (s. Ref. [24] oder Experimente 56-57 in Ref. [8]) lassen sich ein paar Regelmäßigkeiten beobachten:
  - für alle gg-Kerne sind  $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$  und  $\mu = 0$ ;
  - die Parität der ug- bzw. gu-Kerne ändert sich oft bei einem der oben erwähnten magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen; sonst bleibt die Parität zwischen zwei aufeinanderfolgenden magischen Zahlen in den meisten Fällen unverändert;
  - die magnetischen Dipolmomente der ug-Kerne sind bis auf einige Ausnahmen immer positiv und nehmen mit wachsenden Kernspin zu; bei gu-Kernen existiert keine solche Tendenz;
  - bei den magischen Protonenzahlen ändert sich das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments:  $Q$  ist positiv unten einer magischen Zahl, negativ oben.

Verschiedene Kernmodelle werden eingeführt, um diese gemessenen Eigenschaften zu beschreiben bzw. zu erklären. Es soll aber sofort klar sein, dass „Various models of the nucleus emphasize different features of the nucleus. No single simple model explains all nuclear properties“ (E.Fermi: Kap. 8, Abschnitt H in Ref. [30]). Um die oben erwähnten Eigenschaften teilweise wiederzugeben werden in den drei folgenden Abschnitten drei Modelle des Kerns eingeführt, die unterschiedlichen Beschreibungsarten mit Betonung auf diversen Aspekten entsprechen.

## II.2 Tröpfchenmodell

In Abschnitt I.2 wurde die gute Beschreibung der gemessenen Ladungsdichteverteilungen von Kernen mit  $A \geq 20$  mithilfe der Woods–Saxon Verteilung (I.20) erwähnt. Dementsprechend ist die Teilchendichte  $n(0)$  im Zentrum des Kerns in guter Näherung dieselbe für alle schwere Kerne:  $n(0) \simeq n_\infty = 0,17$  Nukleonen/ $\text{fm}^3$ . Diese Universalität liegt zugrunde dem Begriff der *Kernmaterie*, d.h. einer Materie, die aus stark wechselwirkenden Nukleonen besteht.<sup>(18)</sup> Die *Sättigungsdichte*  $n_\infty$  ist dann die Dichte dieser Kernmaterie im Gleichgewicht bei verschwindender Temperatur  $T$ .<sup>(19)</sup>

Die Eigenschaften der Kernmaterie sind bei  $T = 0$  jene einer (kompressiblen) Flüssigkeit:

- die Kohäsionskräfte sind stark genug, um spontane Verdampfung zu verhindern (es existieren stabile gebundene Kerne!): kein Gas;
- die Kernmaterie besitzt kontinuierliche Rotations- und Translationssymmetrien, ist also kein Festkörper.

<sup>(18)</sup> Um eine Art von Materie puristisch zu definieren, muss man zuerst ein unendliches System von wechselwirkenden Nukleonen betrachten.

<sup>(19)</sup> Unter üblichen Bedingungen ist die Temperatur  $T$  solche, dass die kinetische Energie  $\simeq k_B T$  der Kerne viel kleiner ist, als die typische Energie in der Kernphysik  $\approx 1-10$  MeV. Nicht-vernachlässigbare Temperaturen bzw. kinetische Energien werden nur in der allerletzten Phase des Lebens schwerer Sterne erreicht, oder in Kernkollisionen.

In diesem Bild ist ein Kern als ein Tröpfchen von Kernmaterie dargestellt: ein bestimmter Kern wird nur durch seine Massenzahl  $A$  (bzw. seinen Radius  $\propto A^{1/3}$ ) und seine elektrische Ladung  $Z$  charakterisiert; der Rest seiner Eigenschaften sollen jene der Kernmaterie spiegeln. Die gesamte Energie des Tröpfchens entspricht der Bindungsenergie des Kerns: dieser Energie beitragen dann ein Volumen- und ein Oberflächenterm mit umgekehrtem Vorzeichen. Da der Kern elektrisch geladen ist, soll auch ein betreffender „Coulomb“-Term der Energie beitragen.

Neben diesen Beiträgen können weitere Terme ins Modell eingeführt werden, um verschiedene Kerneigenschaften wiederzugeben. Im Folgenden werden nur zwei solche halb-phänomenologische Beiträge betrachtet, die Vorhersagen über die Stabilität von Kernen ermöglichen.

### II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel

Die Bindungsenergie wird als die Summe verschiedener Beiträge geschrieben [31, 32]:

$$B = B_V + B_S + B_C + B_A + B_\delta, \tag{II.1}$$

wobei  $B_V, B_S, B_C, B_A, B_\delta$  von  $(A, Z)$  und von positiven Koeffizienten  $a_V, a_S, a_C, a_A, a_\delta$  abhängen.

- Volumenenergie  $B_V = a_V A$  (Nukleonenzahl  $A \propto$  Volumen  $V$ )  
Dieser Term entspricht einer konstanten Energiedichte ( $\Leftrightarrow$  konstanten Teilchendichte);  
 $a_V$  wird manchmal *Sättigungsenergie* genannt.
- Oberflächenterm  $B_S = -a_S A^{2/3}$  (Oberfläche  $S \propto R^2 \propto A^{2/3}$ )  
Die Nukleonen an der Oberfläche sind weniger gebunden als solche im Inneren, weil sie weniger Nachbarn besitzen.
- Coulomb-Term  $B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$  ( $\propto Q^2/R$ )  
Die  $Z$  Protonen stoßen einander ab: verringerte Bindung.

Es sei eine homogen geladene Kugel mit Radius dem  $r'$  und der Ladungsdichte  $\rho$ . Für Abstände  $r \geq r'$  erzeugt sie das elektrostatische Coulomb-Potential  $U(r) = q'/4\pi\epsilon_0 r$ , wobei  $q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho$ . Um weitere Ladungen von außen zuführen, z.B. eine Kugelschale mit der Ladung  $dq' = 4\pi r'^2 dr' \rho$ , muß man eine Arbeit  $dW = -dq' [U(\infty) - U(r')] = U(r') dq'$  leisten. Um einen Kern mit dem Radius  $r' = R$  und der Ladung  $Ze = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  zu kondensieren benötigt man insgesamt eine Arbeit

$$W = \int_0^R dW = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r'^4 dr' = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

Mithilfe der Formel  $R = r'_0 A^{1/3}$  wobei  $r'_0 = 1,128$  fm erhält man also  $a_V = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'_0} = 0,77$  MeV.

Dieser Term kann experimentell mithilfe von sog. *Spiegelkernen* bestimmt werden, d.h. einem Paar von Kernen mit  $(Z, N)$  und  $(Z - 1, N + 1 = Z)$  [z.B. ( ${}^3_2\text{He}, {}^3_1\text{H}$ ), ( ${}^{13}_7\text{N}, {}^{13}_6\text{C}$ )]: die Differenz zwischen den Bindungsenergien der Kerne lautet

$$\Delta B = a_C \left( \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z - 1)^2}{A^{1/3}} \right) = a_C \frac{2Z - 1}{A^{1/3}} = a_C A^{2/3}.$$

Aus einer Anpassung der  $\Delta B(A)$ -Abhängigkeit für die vorhandenen Spiegelkernpaare wird dann  $a_C$  erhalten (vgl. z.B. Ref. [33]).

- Asymmetrie-Energie  $B_A = -a_A (A/2 - Z)^2 A^{-1}$   
Quantenmechanische Effekte (s. § II.3.3) im Bezug auf die gemessene annähernde Ladungsunabhängigkeit der Nukleon–Nukleon Kräfte bevorzugen einen möglichst kleinen Neutronenüberschuß. Umgekehrt sind Kerne mit hohen Werten von  $N - Z = A - 2Z$  weniger gebunden.
- Paarungsterm  $B_\delta$   
Motiviert durch die Beobachtung, dass es mehr Kerne mit geraden Protonen- und Neutronenzahl gibt, als mit ungerader  $Z$  oder  $N$ :

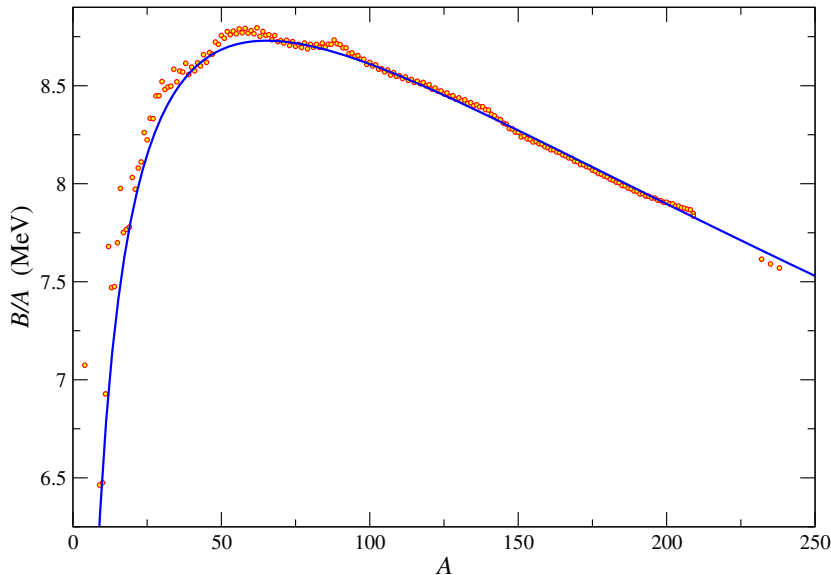
$$B_\delta = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

wobei  $\delta = a_\delta A^{-1/2}$  (oder manchmal  $\propto A^{-3/4}$ : die  $A$ -Abhängigkeit ist rein empirisch).

Insgesamt erhält man die Bethe–Weizsäcker Massenformel

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - \frac{A}{2})^2 A^{-1} \pm \delta}{c^2}. \quad (\text{II.2})$$

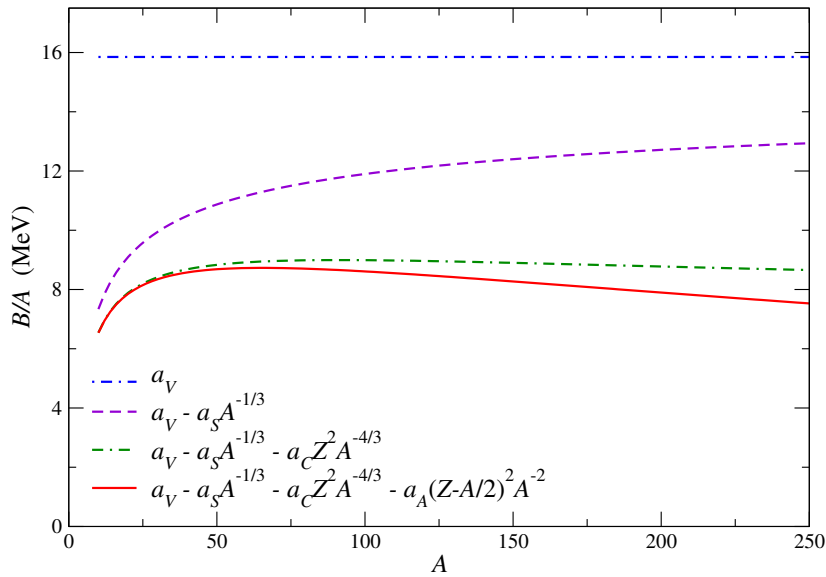
Die verschiedenen Koeffizienten werden durch Anpassung den Daten bestimmt. Man findet z.B.  $a_V = 15,85$  MeV,  $a_S = 18,34$  MeV,  $a_C = 0,71$  MeV,  $a_A = 92,86$  MeV,  $a_\delta = 11,46$  MeV [34]. Der angepasste Wert des Parameters  $a_c$  ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der elektrostatischen Berechnung. Mit diesen Parametern liefert die Massenformel (II.2) eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Massen bzw. Bindungsenergien stabiler Kerne, mit einer Genauigkeit von etwa 1% für  $A > 30$ , vgl. Abb. II.1.



**Abbildung II.1** – Bindungsenergien pro Nukleon stabiler Kerne (vgl. Bildtext von Abb. I.10) zusammen mit der durch Gl. (II.1) gegebenen Anpassung unter Auslassung des Paarungsterms  $B_\delta$ .

Die jeweiligen Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie werden in Abb. II.2 dargestellt: Die Oberflächenenergie spielt die größte Rolle bei kleinen Kernen,  $B_S/A$  sinkt aber mit wachsender  $A$ . Im Gegensatz sind die relativen Höhen der Coulomb- und Asymmetrie-Terme bei leichten Kernen gering, nehmen aber bei schwereren Kernen zu.

In einigen Büchern wird der Coulomb-Beitrag als  $B_C = -Z(Z-1)/A^{1/3}$  statt des oben gegebenen Terms geschrieben. Der angebliche Grund ist, die „Selbstwechselwirkung“ jedes Protons nicht zweimal zu zählen. Eine solche Verfeinerung wird im Folgenden nicht betrachtet: Erstens ist der Unterschied zwischen  $Z^2$  und  $Z(Z-1)$  nur bedeutsam bei kleinem  $Z$ , wo der Coulomb-Term immerhin eine geringe Rolle spielt. Zweitens ist es nicht klar, warum im Zähler der „Selbstenergie“ der Protonen der Kernradius vorkommt, und nicht der Protonradius.



**Abbildung II.2** – Jeweilige Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon. Für  $Z$  wurde der durch Gl. (II.3) gegebene Wert des stabilsten Kerns bei gegebener  $A$  benutzt.

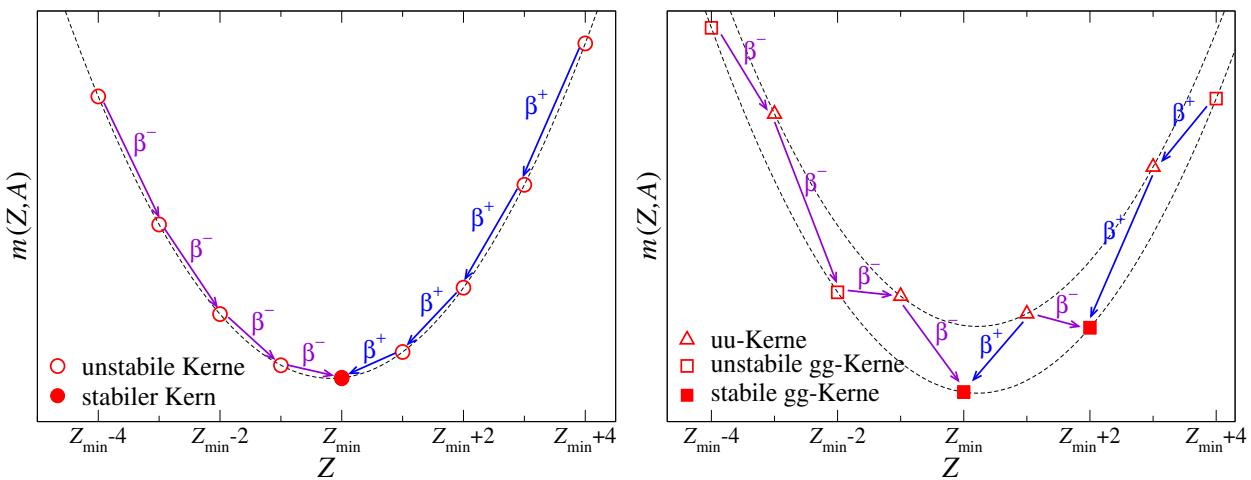
### II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell

Aus der Massenformel (II.2) kann man die Stabilität eines Nuklides gegen verschiedene mögliche Umwandlungen bestimmen.

#### II.2.2a Stabilität in einer Isobarenreihe

Betrachte zum Beispiel die Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe  $A = \text{const.}$  Nach Gl. (II.2) hängt für festes  $A$  die Masse quadratisch von  $Z$  ab. Dann gibt es zwei Möglichkeiten je nachdem, ob die Nukleonenzahl ungerade oder gerade ist:

- ungerade  $A$ : Der Paarungsterm  $B_\delta$  verschwindet für  $g_u$ - und  $g_u$ -Kerne, deren Massen auf einer einzigen Parabel zusammen liegen (Abb. II.3 links). Nur ein mit der möglichst minimalen Masse Kern ist stabil, in den die anderen durch vorlaufende  $\beta^+$ - oder  $\beta^-$ -Zerfälle sich umwandeln können.<sup>(20)</sup>



**Abbildung II.3** – Variation mit  $Z$  der Masse  $m(Z, A)$  in einer Isobarenreihe für ungerade (links) bzw. gerade (rechts) Massenzahl  $A$ .

<sup>(20)</sup>Um genauer zu bestimmen, ob ein  $\beta^-$ - bzw.  $\beta^+$ -Zerfall energetisch möglich ist, muss man auch die Masse des emittierten Elektrons bzw. Positrons berücksichtigen, s. § III.3.3.

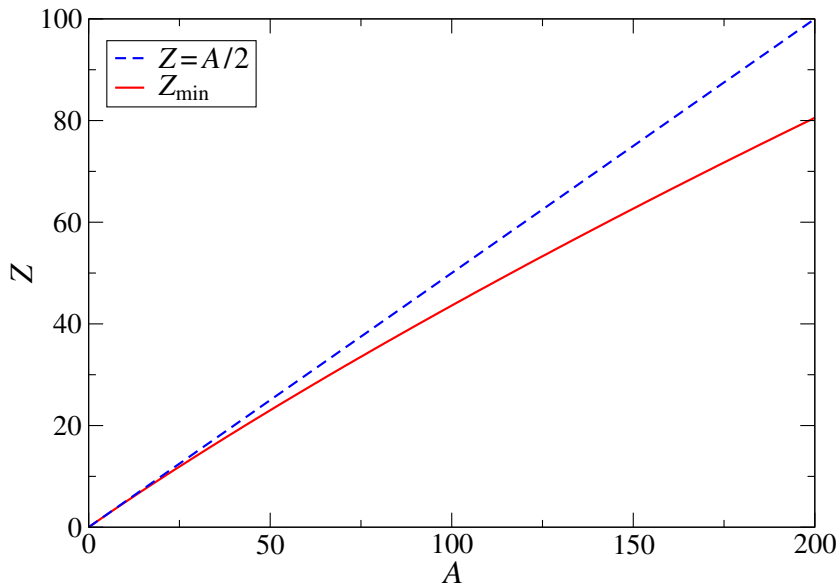
- gerade  $A$ : Der Massenformel nach liegen die Massen der gg- bzw. uu-Kerne auf zwei verschiedenen Parabeln (Abb. II.3 rechts). Da kein direkter Übergang zwischen Isobaren mit  $Z$  und  $Z \pm 2$  möglich ist,<sup>(21)</sup> können mehrere stabile gg-Isobare existieren. Andererseits kann ein uu-Kern nur stabil sein, wenn er kein gg-Isobar mit einer niedrigeren Masse besitzt.<sup>(22)</sup>

Somit wird die 1934 experimentell entdeckte *Mattauchsche Isobarenregel* erklärt, dass der Unterschied der Protonenzahlen zweier stabiler Isobare mindestens 2 sein soll [35].

Die Protonenzahl  $Z_{\min}$  des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe wird durch die Bedingung  $\partial m(Z, A)/\partial Z = 0$  gegeben. Mit Gl. (II.2) findet man

$$Z_{\min}(A) = \frac{A a_A + (m_n - m_p)c^2}{2 a_A + a_C A^{2/3}} = \frac{A}{1,97 + 0,015A^{2/3}}. \quad (\text{II.3})$$

Die entsprechende Abhängigkeit ( $\beta$ -Stabilitätslinie, *Stabilitätstal*) wird in Abb. II.4 gezeigt. Für kleines  $A$  liefert diese Gleichung  $Z_{\min} \simeq A/2$ , während  $Z_{\min}$  für größere Massenzahl immer kleiner als  $A/2$  wird: somit wird der beobachtete zunehmende relative Neutronenüberschuß erklärt.



**Abbildung II.4** – Protonenzahl  $Z_{\min}$  des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe, Gl. (II.3).

### II.2.2b Stabilität gegenüber $\alpha$ -Zerfall

Ein Kern ist gegenüber  $\alpha$ -Zerfall (= Emission eines  ${}^4_2\text{He}$ -Kerns) energetisch instabil, wenn seine Masse größer als die Summe der Massen eines  ${}^4_2\text{He}$ -Kerns und des Kerns mit  $Z - 2$  und  $A - 4$  ist:

$$Q_\alpha \equiv [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m({}^4_2\text{He})]c^2 \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

$Q_\alpha$  ist dann die Summe der kinetischen Energien des emittierten  $\alpha$ -Teilchens und des zurückstoßenden Tochterkerns (s. § III.3.2).

Der Massenformel (II.2) nach wird  $Q_\alpha$  positiv für die Kerne auf der  $\beta$ -Stabilitätslinie sobald  $A \geq 166$  ( $Z_{\min} = 68$ ): Kerne mit größerer Massenzahl sollten gegen die Emission von  $\alpha$ -Teilchen instabil sein.<sup>(23)</sup> Der erste  $\alpha$ -instabile Kern im Stabilitätstal ist tatsächlich  ${}^{144}_{60}\text{Nd}$  mit  $Q_\alpha = 1,9$  MeV und der Halbwertszeit  $T_{1/2} = 2,3 \cdot 10^{15}$  Jahren (s. § III.3.2).

<sup>(21)</sup>Tatsächlich gibt es auch die Möglichkeit eines *doppelten  $\beta$ -Zerfalls*.

<sup>(22)</sup>Da die Breite der Parabeln mit  $A$  wächst, wird das mögliche Vorhandensein eines gg-Isobars mit niedrigerer Masse wahrscheinlicher mit steigender Massenzahl; deshalb sind die einzigen stabilen uu-Kerne die leichtesten.

<sup>(23)</sup>Wenn anstatt der nach der Massenformel berechneten Werte die gemessenen Kernmassen benutzt werden, schneidet die Kurve  $Q_\alpha = 0$  die Stabilitätslinie bei  $A \approx 145$ .

### II.2.2c Stabilität gegen spontane Spaltung

Betrachte der Einfachheit halber die Spaltung eines Kerns in zwei identische Bruchstücke. Diese Spaltung ist energetisch möglich wenn der  $Q_{\text{Sp}}$ -Wert

$$Q_{\text{Sp}} \equiv \left[ m(Z, A) - 2m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \right] c^2 = 2B\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) - B(Z, A) \quad (\text{II.5})$$

positiv ist. Mithilfe der Massenformel (II.2) findet man unter Auslassung des Paarungsterms

$$Q_{\text{Sp}} = a_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}).$$

Dies wird positiv sobald  $\frac{Z^2}{A} > \frac{(2^{1/3} - 1)a_S}{(1 - 2^{-2/3})a_C} = 18, 14$ , d.h. für Kerne im  $\beta$ -Stabilitätstal ab  ${}^{95}_{42}\text{Mo}$ .

Der leichteste  $\beta$ -stabile Kern mit beobachteter spontaner Spaltung ist aber erheblich schwerer:  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  (s. § III.3.5 e).

### II.2.3 Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation

Betrachten wir die Vorhersage des Tröpfchenmodells zur Stabilität eines makroskopisch großen Objekts aus Kernmaterie. Deswegen führen wir in die Bindungsenergie (II.1) einen zusätzlichen Beitrag ein, der der Gravitationsbindungsenergie des Objekts entspricht:

$$B_G \equiv \frac{3}{5} \frac{G_N m^2}{R},$$

wobei  $G_N$  die Newtonsche Konstante ist, und  $m$  bzw.  $R$  die Masse bzw. der Radius des Objekts ist. Dieser Beitrag ist für übliche Kerne vernachlässigbar.

Nehmen wir an, dass das Objekt meistens aus Neutronen hergestellt ist, sodass  $Z \ll N \approx A$  und der Coulomb-Term in Gl. (II.1) vernachlässigbar ist. Die Masse ist dann  $m = Am_n$  (der Einfachheit halber wird der Beitrag der gesamten Bindungsenergie zu diesem Term vernachlässigt). Für ein großes Objekt ( $A \gg 1$ ) werden der Oberflächenterm und der Paarungsterm viel kleiner als  $B_V$ ,  $B_A$  und  $B_G$ . Mit dem Wert des „Kern“-Radius  $R = r'_0 A^{1/3}$  erhält man

$$B \simeq a_V A - \frac{a_A}{4} A + \frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{5/3}.$$

Das Objekt wird gebunden, wenn diese Bindungsenergie positiv ist, d.h. wenn

$$\frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{2/3} > \frac{a_A}{4} - a_V = 7,4 \text{ MeV}.$$

Mit  $r'_0 = 1,128$  fm entspricht diese Bedingung einem minimalen Wert  $A > 4 \cdot 10^{55}$ , d.h. einem Radius  $R > 4$  km und einer Masse  $m > 7 \cdot 10^{28}$  kg  $\approx 0,035 M_\odot$  ( $M_\odot$ : Sonnenmasse): das Objekt ist also ein Neutronenstern.<sup>(24)</sup>

## II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas

In diesem Abschnitt und dem folgenden wird die quantenmechanische Natur der einen Atomkern bildenden Nukleonen genauer berücksichtigt als im Tröpfchenmodell. Zu diesem Zweck wird ein Kern als eine Menge von in einem Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen beschrieben.

<sup>(24)</sup>Das hier benutzte Modell ist viel zu vereinfacht, um einen echten Neutronenstern gut zu beschreiben. Zum Beispiel wurde stillschweigend angenommen, dass die den Neutronstern bildende Kernmaterie inkompressibel ist (dies entspricht  $a_V = \text{const.}$ , unabhängig von der Tiefe im Stern). Es ist aber hoch merkwürdig, dass die guten Größenordnungen des Radius ( $\sim 10$  km) und der Masse ( $\approx 1 M_\odot$ ) erhalten werden, obwohl die Werte der Koeffizienten in Gl. (II.2) nur geeignet sind, um die Eigenschaften von Kernmaterie mit  $A \lesssim 250$  zu beschreiben, nicht für  $A$  um  $\approx 50$  Zehnerpotenzen größer. Dies zeigt, dass die starke Wechselwirkung wahrscheinlich eine ganz ähnliche Rolle in Neutronensternen wie in Kernen spielt.

Die zugrunde liegende Idee der Modelle ist, dass die Wirkung aller anderen Nukleonen auf ein beliebiges Nukleon sich effektiv zu einem „mittleren“ Potential mitteln lässt, welches das Nukleon in einem kleinen Raumbereich — entsprechend dem Kernvolumen — einsperrt und identisch für alle Nukleonen ist. Löst man das quantenmechanische Problem eines Teilchens im mittleren Potential, so findet man verschiedene gebundene Ein-Teilchen-Zustände auf sukzessiven Energieniveaus, die das Nukleon besetzen kann. Ein den Atomkern darstellender Viel-Teilchen-Zustand ergibt sich dann, indem die  $A$  Nukleonen auf solche Ein-Teilchen-Zustände verteilt werden. Dabei soll der Spin  $\frac{1}{2}$  der Protonen und Neutronen — die somit sog. *Fermionen* sind — berücksichtigt werden: wenn mehrere davon sich im Potentialtopf befinden, gehorchen sie dem Pauli-Prinzip, sodass jeder verfügbare quantenmechanische Ein-Teilchen-Zustand von maximal nur einem Proton bzw. Neutron besetzt werden darf.

Im Fermi-Gas-Modell verzichtet man auf das exakte Spektrum der gebundenen Energieniveaus. Stattdessen verwendet man eine statistische Beschreibung — die eigentlich nur im Fall einer unendlichen Zahl von Teilchen begründet ist — und betrachtet man die im Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen als ein quantenmechanisches „Gas“, wobei die letztere Bezeichnung bedeutet, dass die Wechselwirkungen zwischen den im Potential eingeschlossenen Teilchen klein<sup>(25)</sup> sind. Da es sich bei dem Gas um Fermionen handelt, spricht man von einem *Fermi-Gas* (§ II.3.1). Hiernach wird der Atomkern zunächst als ideales Fermi-Gas aus Nukleonen (§ II.3.2), dann als ideale Mischung zwei idealer Fermi-Gase aus Protonen und Neutronen (§ II.3.3) beschrieben. Durch diesen Ansatz lassen sich einige Eigenschaften des Atomkerns erklären, wie hiernach am Beispiel der in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel phänomenologisch eingeführten Asymmetrie-Energie illustriert wird.

### II.3.1 Ideales Fermi-Gas

Im Folgenden werden die elementaren Grundlagen der Theorie des idealen quantenmechanischen Fermi-Gases bei Null-Temperatur kurz dargelegt. Ausführlichere Darstellungen sind in Lehrbüchern der Statistischen Physik zu finden, z.B. in Refs. [36, 37].

Eine Menge aus  $\mathcal{N}$  nicht-wechselwirkenden Teilchen — ein ideales Gas — sei in einem räumlichen Volumen  $\mathcal{V}$  eingeschlossen, z.B. durch das Kastenpotential  $V(\vec{r}) = 0$  wenn  $\vec{r} \in \mathcal{V}$ ,  $V(\vec{r}) = \infty$  sonst. Für große Volumina wird der Abstand zwischen sukzessiven Energieniveaus sehr gering und man kann annehmen, dass die Niveaus ein fast kontinuierliches Spektrum bilden. Genauer ergibt sich, dass die Anzahl von Teilchen mit Impuls zwischen  $\vec{p}$  und  $\vec{p} + d^3\vec{p}$  durch

$$d\mathcal{N}(\varepsilon_{\vec{p}}) = g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{II.6})$$

gegeben ist, wobei  $\varepsilon_{\vec{p}}$  die dem Impuls  $\vec{p}$  zugehörige Energie ist: für nicht-relativistische Teilchen mit der Masse  $m$ ,  $\varepsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$ , wobei die Massenenergie weggelassen wurde.  $g$  ist der *Entartungsgrad* der Teilchen, d.h. die Zahl von unabhängigen (inneren) Freiheitsgraden einer bestimmten Teilchenart: für Teilchen mit dem Spin  $s$  gilt üblicherweise  $g = 2s + 1$ , entsprechend der Anzahl der möglichen Werte von  $m_s$ .<sup>(26)</sup>

Schließlich bezeichnet  $f(\varepsilon)$  die mittlere Besetzungszahl eines Zustands mit der Energie  $\varepsilon$ . Die funktionale Form von  $f(\varepsilon)$  hängt von der Teilchenart ab, und zwar davon, ob die Teilchen einen ganzzahligen (Boson) oder halbzahligen (Fermionen) Spin haben. Hiernach werden nur Protonen und Neutronen, also Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, betrachtet. Daher kann ein Zustand laut dem Ausschließungsprinzip durch maximal ein Teilchen besetzt werden: die Besetzungszahl eines Zustands ist entweder

<sup>(25)</sup> Genauer soll die mit diesen Wechselwirkungen assoziierte potentielle Energie klein gegenüber die kinetische Energie der Teilchen sein.

<sup>(26)</sup> Es gibt aber wichtige Ausnahmen zu dieser Regel, wie z.B. bei Photonen, die in nur  $g = 2$  Polarisationszuständen vorkommen können, obwohl sie Teilchen mit dem Spin 1 sind.



0 und 1, und die genaue mittlere Besetzungszahl hängt von der Temperatur ab. Hiernach wird angenommen, dass das die Nukleonen ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur Null bilden, was sich im Nachhinein prüfen lässt. In diesem Fall ist

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

wobei  $\varepsilon_F$  die sog. *Fermi-Energie* ist, die somit die Energie des höchsten besetzten Niveaus ist, während tiefere Energieniveaus voll besetzt sind.

Integriert man Gl. (II.6) über Energien  $\varepsilon$  von 0 bis  $\infty$ , so soll man die Gesamtzahl von Teilchen  $\mathcal{N}$  erhalten. Äquivalent kann man über alle Impulse  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  integrieren. Da die Besetzungszahl nur von  $\varepsilon_{\vec{p}}$  und dadurch vom Betrag  $p \equiv |\vec{p}|$  abhängt, sind sphärische Koordinaten im Impulsraum für das Integral günstig. Dabei kann man sofort über die Winkeln, die keine Rolle spielen, integrieren, und somit  $d^3\vec{p}$  durch  $4\pi p^2 dp$  ersetzen, wobei  $p$  von 0 bis  $\infty$  läuft. Assoziiert man der Fermi-Energie einen *Fermi-Impuls*  $p_F$ , so kann man die obere Grenze des Integrals durch  $p_F$ , denn die Niveaus mit höherem Impuls sind bei Null-Temperatur unbesetzt. Somit ergibt sich

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{g\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g\mathcal{V}}{6\pi^2\hbar^3} p_F^3. \quad (\text{II.8})$$

### II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Atomkern als ideales Fermi-Gas modelliert, d.h. die Kräfte zwischen den Nukleonen werden ignoriert — genauer besteht die einzige Rolle der Wechselwirkungen darin, den Potentialtopf zu erzeugen; im Potential wechselwirken die Nukleonen nicht mehr miteinander.

Die Beschreibung des Kerns als Gas von voneinander unabhängigen Teilchen kann wegen des kleinen Abstands zwischen Nukleonen und der entsprechenden starken Nukleon–Nukleon Wechselwirkung zwar überraschend wirken. Im Grundzustand des Kerns sind aber alle niedrigsten Zustände im Potentialtopf durch die Nukleonen besetzt, sodass irgendeine Streuung zwischen Nukleonen kaum stattfinden kann: die in der Kollision beteiligten Nukleonen können nämlich nach dem Stoß keine vorhandene freie Zustände finden, was effektiv die Streuung verhindert. Deshalb liefert eine wechselwirkungsfreie Beschreibung eine ziemlich gute Approximation.

Der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen kann in einem ersten Schritt vernachlässigt werden. In diesem Abschnitt wird somit ein ideales Gas aus zwei Fermionentypen mit je dem Spin  $\frac{1}{2}$  und derselben Masse  $m_p = m_n = m_N$ , und ohne elektrische Ladung betrachtet. Der Entartungsgrad dieser Nukleonen ist somit  $g = 4$ , entsprechend 2 Spinzuständen für jede Teilchenart.

Verwendet man die Beziehung (II.8) mit auf der linken Seite der Nukleonenzahl im Kern  $A$  als Gesamtzahl von Teilchen und mit  $g = 4$  und  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Kern}}$ , so ergibt sich

$$A = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,N}^3, \quad (\text{II.9})$$

wobei  $p_{F,N}$  den Fermi-Impuls für das Fermi-Gas aus Nukleonen bezeichnet. Daraus folgen sofort

$$p_{F,N} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left( \frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3} \quad (\text{II.10a})$$

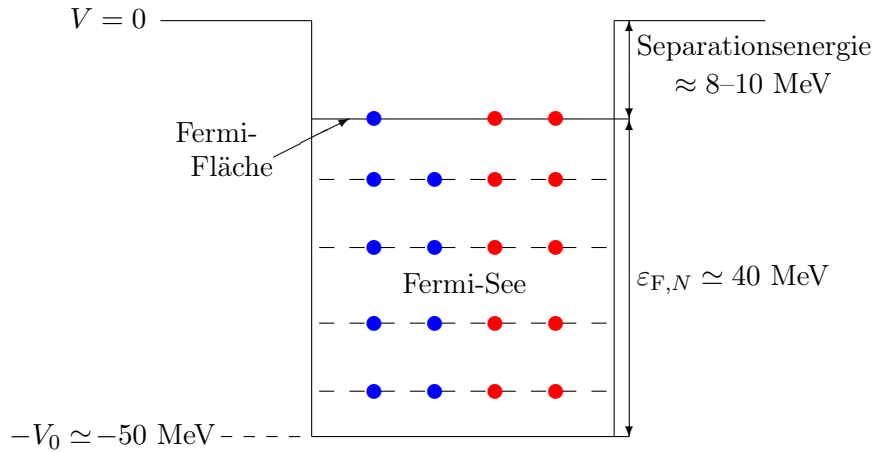
$$\varepsilon_{F,N} = \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_N} \left( \frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.10b})$$

mit  $\varepsilon_{F,N}$  der Fermi-Energie des Nukleonen-Gases.

Mit dem Ansatz  $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3}\pi R_s^3 A$  für das Kernvolumen (vgl. § I.2.4 b) erhält man

$$p_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad \varepsilon_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2}. \quad (\text{II.11})$$

Mit dem Wert  $R_s = 1,128 \text{ fm}$  für den äquivalenten Radius ergeben sich  $p_{F,N} = 265 \text{ MeV}/c$  und  $\varepsilon_{F,N} \simeq 40 \text{ MeV}$ . Die bisher nicht spezifizierte Tiefe  $V_0$  des dem Kern bildenden Potentialtopfs muss mindestens diesen Wert haben, damit die Nukleonen im Topf eingeschlossen bleiben. Bei  $\beta$ -stabilen Kernen ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Nukleons etwa  $8\text{--}10 \text{ MeV}$  (§ I.3.3), so dass  $V_0 \simeq 50 \text{ MeV}$  sein soll, wie schematisch in Abb. II.5 dargestellt wird.



**Abbildung II.5** – Schematisches Bild eines ug-Kerns als Einkomponenten-Fermi-Gas aus Nukleonen.

### Bemerkungen:

\* Man hätte auch die Nukleonendichte im Kern  $A/\mathcal{V}_{\text{Kern}} \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen}/\text{fm}^3$  direkt in Gl. (II.10a) einsetzen können, um den Fermi-Impuls

$$p_{F,N} = \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{1/3} \hbar n_\infty^{1/3}$$

dadurch auszudrücken und zu berechnen.

\* Wie zu erwarten war ist die Fermi-Energie der typischen Ordnung der Energien der Kernphysik. Definiert man über  $k_B T_F \equiv \varepsilon_F$  eine *Fermi-Temperatur*, so ist diese für Atomkerne etwa  $4,6 \cdot 10^{11} \text{ K}$ . Somit sind übliche Temperaturen von  $300 \text{ K}$  oder sogar  $3000 \text{ K}$  viel kleiner als dieser Wert, was die Annahme eines Fermi-Gases bei Null-Temperatur rechtfertigt.

Die gesamte kinetische Energie der  $A$  Nukleonen im Kern ist<sup>(27)</sup>

$$E_N = \int \varepsilon d\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_0^{p_{F,N}} \frac{p^2}{2m_N} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = \frac{3}{5} \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} A. \quad (\text{II.12})$$

Mit der oben berechneten Fermi-Energie ist die durchschnittliche kinetische Energie pro Nukleon unabhängig von der Nukleonenzahl:  $E_N/A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \simeq 24 \text{ MeV}$ . Somit gilt  $E_N/A \ll m_N c^2$ : die Nukleonen sind also nicht relativistisch, was stillschweigend in der Herleitung angenommen wurde (z.B. in Gl. II.10b).

<sup>(27)</sup>Die letzte Identität folgt aus  $\frac{d\mathcal{N}}{dp} \propto p^2$  und  $\int_0^{p_{F,N}} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = A$ .

### II.3.3 Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas von Protonen und Neutronen

Das einfache Modell eines idealen Fermi-Gases von undifferenzierten Nukleonen ist ja nützlich, um Größenordnungen zu erhalten; es leidet aber an einem wichtigen Problem, und zwar dass alle Nuklide in einer Isobarenreihe gleich stabil sind, was offensichtlich falsch ist.

Um den obenerwähnten Mangel zu beheben wird der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in diesem Abschnitt berücksichtigt werden. Statt eines einzigen Gases sind jetzt im Potentialtopf zwei verschiedene Fermi-Gase von Protonen bzw. Neutronen mit  $m_p \neq m_n$  und unterschiedlichen Fermi-Energien  $\varepsilon_{F,p}$  bzw.  $\varepsilon_{F,n}$ . Für jedes Gas ist der Entartungsgrad jetzt  $g = 2$ . Die elektrische Ladung des Protons und die daraus folgende Coulomb-Abstoßung wird aber in der Diskussion noch ausgelassen.

Die Beziehung (II.8) angewandt auf jedes Fermi-Gas führt jetzt zu

$$Z = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,p}^3, \quad N = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,n}^3, \quad (\text{II.13})$$

so dass die jeweiligen Fermi-Impulse der Gase durch

$$p_{F,p} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left( \frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad p_{F,n} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left( \frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad (\text{II.14a})$$

und die Fermi-Energien durch

$$\varepsilon_{F,p} = \frac{p_{F,p}^2}{2m_p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_p} \left( \frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_{F,n} = \frac{p_{F,n}^2}{2m_n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} \left( \frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3} \quad (\text{II.14b})$$

gegeben sind. Dies lautet noch

$$p_{F,p} = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_s} \left( \frac{Z}{A} \right)^{1/3}, \quad p_{F,n} = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_s} \left( \frac{N}{A} \right)^{1/3} \quad (\text{II.15a})$$

und

$$\varepsilon_{F,p} = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p R_s^2} \left( \frac{Z}{A} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_{F,n} = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n R_s^2} \left( \frac{N}{A} \right)^{2/3}. \quad (\text{II.15b})$$

In Analogie zum Einkomponenten-Fermi-Gas ergeben sich die gesamten kinetischen Energien der beiden Gase:

$$E_p = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,p} Z \quad \text{und} \quad E_n = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,n} N. \quad (\text{II.16})$$

Die gesamte kinetische Energie des Atomkerns  $E \equiv E_p + E_n$  lautet dann

$$E = \frac{3}{5} (\varepsilon_{F,p} Z + \varepsilon_{F,n} N) = \frac{3}{5} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2R_s^2} \frac{1}{A^{2/3}} \left( \frac{Z^{5/3}}{m_p} + \frac{N^{5/3}}{m_n} \right).$$

Dies lässt sich als  $E = E_N + \Delta E$  umschreiben, wobei  $E_N$  die oben berechnete gesamte kinetische Energie (II.12) des Nukleonen-Gases ist. Indem man

$$E = \frac{3}{5} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2} \frac{1}{A^{2/3}} \left[ A^{5/3} + 2^{2/3} \left( \frac{m_N}{m_p} Z^{5/3} + \frac{m_N}{m_n} N^{5/3} \right) - A^{5/3} \right]$$

schreibt, und unter Vernachlässigung der geringen Massendifferenz zwischen Neutron und Proton, erhält man

$$\Delta E \approx \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left( \frac{2}{A} \right)^{2/3} \left[ Z^{5/3} + N^{5/3} - 2 \left( \frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (\text{II.17})$$

Sei  $T_3 \equiv \frac{1}{2}(Z - N)$ , was zu  $Z = A/2 + T_3$  und  $N = A/2 - T_3$  führt. Die Taylor-Entwicklung von  $\Delta E$  für  $|Z - N| \ll A$  gibt

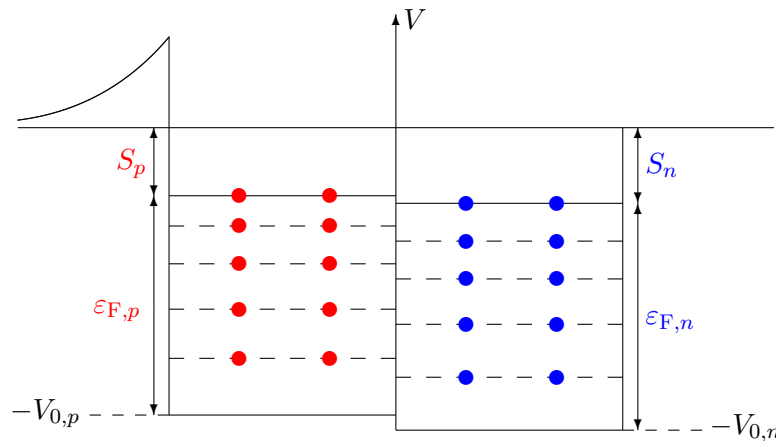
$$\Delta \mathcal{E} \simeq \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(\frac{2}{A}\right)^{2/3} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[ \left(1 + \frac{2T_3}{A}\right)^{5/3} + \left(1 - \frac{2T_3}{A}\right)^{5/3} - 2 \right] = \frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{T_3^2}{A} = \frac{1}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{(Z - N)^2}{A}.$$

Daraus folgt die kinetische Energie pro Nukleon  $E/A$

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left( 1 + \frac{5}{9} \frac{(Z - N)^2}{A^2} \right) = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left( 1 + \frac{20}{9} \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A^2} \right). \quad (\text{II.18})$$

Für feste Nukleonenzahl  $A$  passen symmetrische Kerne in einem seichteren Potentialtopf als asymmetrische Kerne, bzw. wenn  $Z - N \neq 0$  kann Energie durch  $\beta$ -Zerfälle kleiner werden:  $Z \sim N$  ist eher stabil als  $|Z - N|$  groß. Wir können jetzt verstehen, weshalb  $Z \sim N$  energetisch günstiger ist. Dazu liefert Gl.(II.18) die Form des Asymmetrieterms in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel.

Da sich ein Neutron durch  $\beta$ -Zerfall in ein Proton umwandeln kann — und umgekehrt, wenn das energetisch möglich ist —, müssen die Fermi-Energien  $\varepsilon_{F,p}$ ,  $\varepsilon_{F,n}$  bei einem stabilen Kern wie in Abb. II.6 etwa gleich hoch liegen: es darf kein leeres Niveau zwischen den Fermi-Energien der beiden Gase sein.



**Abbildung II.6** – Schematisches Bild eines gg-Kerns als Fermi-Gas von Protonen und Neutronen unter Berücksichtigung der Korrektur, die durch die Coulomb-Abstoßung bedingt ist.  $S_p$  bzw.  $S_n$  ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Protons bzw. eines Neutrons.

### Bemerkungen:

\* Die kinetische Energie pro Nukleon (II.18) sollte mutmaßlich die Größe der in der Bethe–Weizsäcker Massenformel eingeführten Asymmetrie-Energie liefern: mit  $\varepsilon_{F,N} \simeq 40$  MeV findet man  $a_A = -\frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \simeq 52$  MeV. Das ist ungefähr um einen Faktor 2 kleiner als der durch Anpassung der Daten erhaltene Wert. Die Diskrepanz kommt daraus her, dass die Tiefe des Topfs  $-V_0$  selbst vom Neutronenüberschuß  $N - Z$  des Atomkerns abhängt.

\* Höhere Ordnungen in der Taylor-Entwicklung der Energiedifferenz (II.17) liefern natürlich zusätzliche Terme, die in die Massenformel können eingeführt werden. Zum Beispiel hätte der nächste Beitrag zur Masse pro Nukleon eine Abhängigkeit  $(Z - \frac{A}{2})^4/A^4$ , was für Nuklide im Stabilitätstal nur eine geringe Korrektur darstellt.

## II.3.4 Mögliche Verbesserungen des Modells

### II.3.4 a Oberflächen- und Coulomb-Energien

Die Energie pro Nukleon (II.18) basiert letztendlich auf den Gleichungen (II.13), die selbst aus der Teilchenzahl in einem infinitesimalen Impulsraumelement (II.6) folgen. Man kann zeigen, dass diese Teilchenzahl leicht überschätzt ist, weil sie tatsächlich ein unendliches Volumen des Kerns im Ortsraum  $\mathcal{V}_{\text{Kern}}$  voraussetzt. Die entsprechende Korrektur zur Energie des Fermi-Gases ist eigentlich proportional zur Oberfläche des Kerns und trägt der Gesamtenergie einen Term proportional zu  $A^{2/3}$  bei, der der Oberflächenenergie in der Massenformel II.2 entspricht.

Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation kann die Oberfläche eines mit dem endlichen Volumen reellen Kerns nicht fest sein: sonst hätten die Nukleonen an der Oberfläche eine bestimmte Position und  $\vec{p} = \vec{0}$ , was gleichzeitig unerlaubt ist. Somit fehlen die Zustände mit dem Abstand  $|\vec{r}| = R_s$  vom Kernzentrum und dem Impuls  $\vec{p} = \vec{0}$ , sodass die Gesamtenergie um eine Korrektur  $\propto R_s^2$  verringert ist. Eine quantitative Abschätzung der benötigten Korrektur zur Zahl der Zustände, befindet sich z.B. in Abschn. 2.3.1 von Ref. [1].

Dazu sollte die bisher ausgelassene Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen in Betracht gezogen werden. Eine erste einfache Folge dieser Abstoßung ist, dass der Potentialtopf, in dem die Protonen eingeschlossen sind, wegen des destabilisierend wirkenden Coulomb-Terms  $\propto -Z^2/A^{1/3}$  (vgl. § II.2.1) seichter ist, d.h.  $V_{0,p} < V_{0,n}$ , wie in Abb. II.6 dargestellt wird.

### II.3.4 b Berücksichtigung der Wechselwirkungen

Abweichung vom Modell des idealen Gases.

### II.3.4 c Stärken und Mängel des Fermi-Gas-Modells

Die Beschreibung des Kerns als ein Fermi-Gas liefert zunächst nützliche Größenordnungen, z.B. die kinetische Energie der Nukleonen im Kern. Außerdem erlaubt die oben beschriebene schrittweise Verfeinerung eine Erklärung verschiedener Terme der Bethe-Weizsäcker Massenformel, insbesondere des Asymmetrie-Terms.

Dennoch läßt das Fermi-Gas-Modell die beobachtete bevorzugte Paarung von Protonen bzw. Neutronen in Kerne (d.h. den Paarungsterm  $B_\delta$ ) unerklärt. Des Weiteren kann das Modell keine Auskunft über die Verteilung der Energieniveaus geben: das Energiespektrum eines Fermi-Gases ist nämlich strukturlos bzw. gleichförmig, während die Anwesenheit einer bestimmten Struktur durch verschiedenen Beobachtungen angedeutet wird, z.B. durch die gemessenen Anregungsenergien unterschiedlicher Nuklide (s. Beispiel in § II.4.1).

## II.4 Schalenmodell des Atomkerns

Wie gerade diskutiert wurde sind das Tröpfchen- und das Fermi-Gas-Modell statistische Modelle, die naturgemäß nur die globalen Eigenschaften eines statistischen Ensembles von Atomkernen beschreiben können, für individuelle Kerne aber weniger erfolgreich sind. Wie in Abschn. II.1 schon kurz erwähnt wurde, gibt es manchmal ziemlich erhebliche Abweichungen von diesem Durchschnittsverhalten, insbesondere für Nuklide mit einer magischen Protonen- oder Neutronenzahl, die auch müssen erklärt werden. Einige dieser besonderen Eigenschaften der „magischen Atomkern“ werden erstens in § II.4.1 dargelegt.

Zur Erklärung dieser Eigenschaften sieht es in Analogie zur Atomphysik passend aus, einen Kern als Menge von Protonen und Neutronen in unterschiedlichen Ein-Teilchen-Zuständen zu beschreiben. Dabei befinden sich die Nukleonen auf sukzessiven entarteten Energieniveaus, die als aufeinander folgende Protonen- bzw. Neutronenschalen können betrachtet werden. Somit handelt es sich um ein *Schalenmodell* des Kerns. Der Unterschied mit dem Fermi-Gas-Modell des vorigen Abschnitts liegt darin, dass die genaue Struktur des Energiespektrums jetzt explizit soll betrachtet werden. Dementsprechend spielt die Form des mittleren Potentials, das die Teilchen einschließt, nun eine

Rolle, denn sie bestimmt die Reihenfolge des Energieniveaus (§ II.4.2). Die einfachsten Potentiale mit nur einer Ortsabhängigkeit können die experimentell gefundenen magischen Zahlen aber nicht reproduzieren und man muss ein zusätzliches Ingredienz einbauen, und zwar die Kopplung zwischen dem Spin jedes Nukleons und dessen Bahndrehimpuls II.4.3.

### II.4.1 Motivation für ein Schalenmodell

Während die Bethe–Weizsäcker Massenformel die Massen bzw. Bindungsenergien der stabilen Atomkerne erstaunlich gut wiedergibt, treten für Nuklide mit einer magischen Protonen- oder Neutronenzahl, d.h.  $Z \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82\}$  oder  $N \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126\}$ , relativ große Abweichungen auf, wie in Abb. II.1 zu sehen ist. Genauer sind die Bindungsenergien pro Nukleon solcher Atomkerne größer als das durch die Formel (II.2) durchschnittliche Verhalten, d.h. diese Kerne sind besonders stabil.

Diese erhöhte Stabilität der magischen Kerne spiegelt sich in weiteren Eigenschaften wider:

- Im Vergleich mit ihren unmittelbaren Nachbarn gibt es mehr stabile Isotope bzw. Isotone mit einer magischen  $Z$  bzw.  $N$ , s. Abb. II.7.

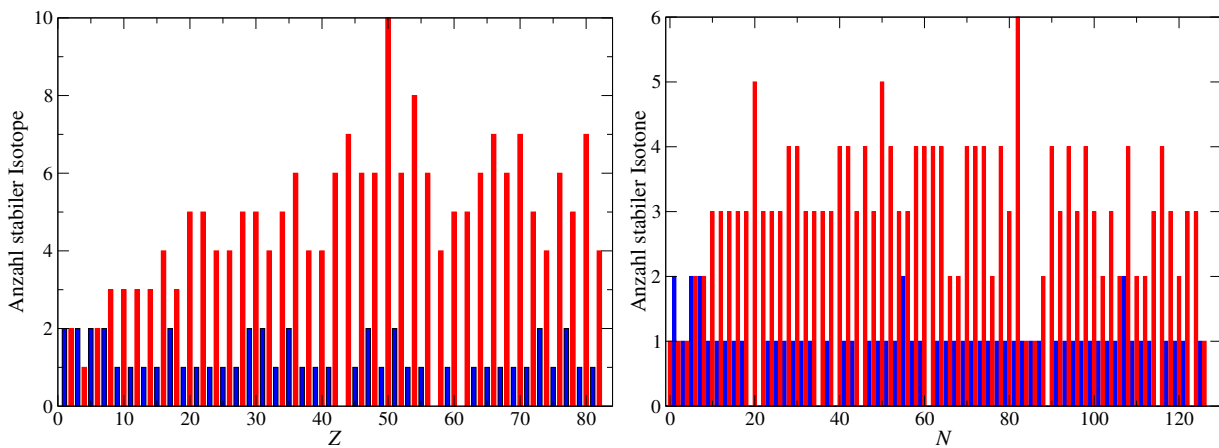


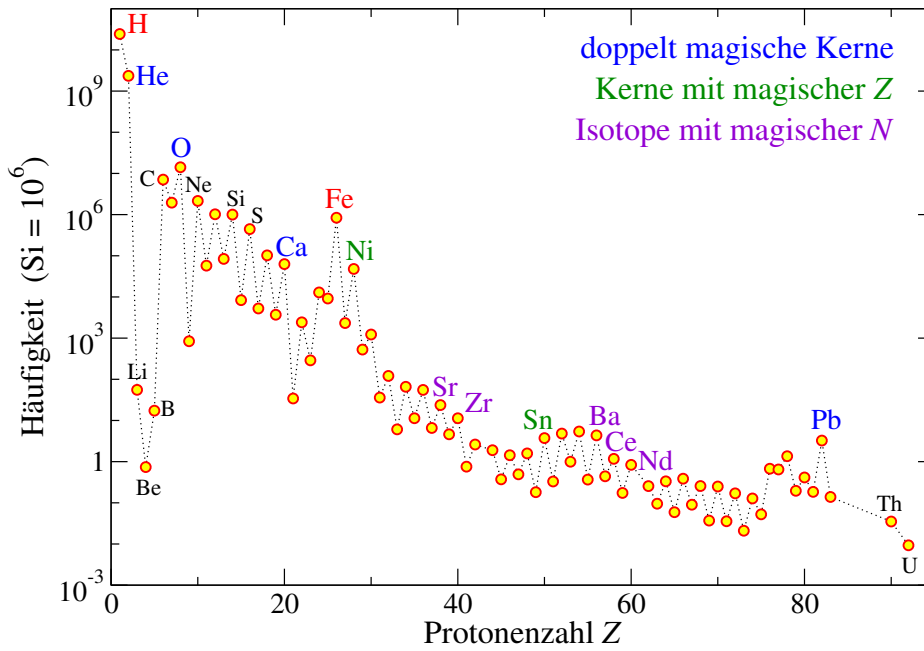
Abbildung II.7 – Links: Anzahl der stabilen Isotope; rechts: Anzahl der stabilen Isotone.

- Die in Abb. II.8 dargestellte kosmische Häufigkeit der Kerne mit magischer  $Z$  oder  $N$  ist höher als diejenige ihrer Nachbarn. Auf dieser Abbildung merkt man auch den Unterschied zwischen den Häufigkeiten von Nukliden mit gerader bzw. ungerader Protonenzahl  $Z$ .

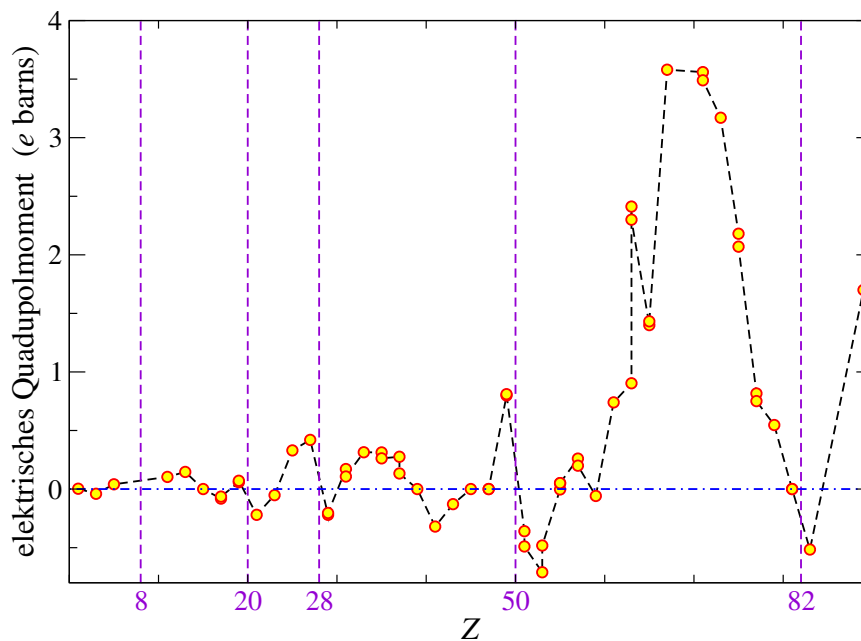
**Bemerkung:** Doppelt magische Kerne sind oft an den Grenzen des Stabilitätsbereichs:  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  ist der schwerste stabile Nuklide mit  $N = Z$ ; bei  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$  ist der Neutronenüberschuss besonders hoch;  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  ist der schwerste stabile Nuklide. Auch instabile doppelt magische Kerne — wie  ${}^{48}_{28}\text{Ni}$ , Spiegelnucleon von  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$  mit einem extrem niedrigen  $N/Z \simeq 0,71$ ,  ${}^{78}_{28}\text{Ni}$ , mit  $N/Z \simeq 1,79$ , oder  ${}^{100}_{50}\text{Sn}$  bzw.  ${}^{132}_{50}\text{Sn}$ , die fast an den Proton- bzw. Neutron-drip lines sitzen — sind weniger instabil als ihre Nachbarn.

Neben diesen mit der Stabilität verknüpften Eigenschaften der magischen Kerne lassen sich noch ein paar Besonderheiten bei diesen Nukliden merken:

- Bei den magischen Protonenzahlen ändern sich die Parität der ug-Kerne sowie das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments (Abb. II.9); bei den magischen Neutronenzahlen ändert sich die Parität der gu-Kerne.
- Die Energie  $E^*$  der ersten angeregten Zustände nimmt bei den Kernen mit magischer  $Z$  oder  $N$  besonders hohe Werte an.  
Z.B. gilt für den doppelt magischen  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ -Kern  $E^* = 2,61$  MeV, während  $E^* \approx 0,8\text{--}0,9$  MeV für die Blei-Isotope mit 202, 204, 206, 210 oder 212 Nukleonen, bei denen  $N \neq 126$  ist.



**Abbildung II.8** – Häufigkeiten der atomaren Elemente im Sonnensystem, abgeschätzt mithilfe von Meteoriten bzw. Beobachtungen der Sonnenphotosphäre. Daten aus Ref. [39].



**Abbildung II.9** – Elektrische Quadrupolmomente der stabilen ug-Kerne. Messdaten aus Ref. [40].

- Der Einfangsquerschnitt für Neutronen — d.h. der Wirkungsquerschnitt für den Prozess<sup>(28)</sup>  $n + \frac{A}{Z}(\ )_N \rightarrow \frac{A+1}{Z}(\ )_{N+1}$  — ist besonders klein für Kerne mit magischer Neutronenzahl. Im Gegenteil zeigen Atomkerne mit  $N$  um eins kleiner als eine magische Zahl besonders große Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfang.

Beispielsweise ist  $\sigma(n + \frac{137}{56}\text{Ba}_{81} \rightarrow \frac{138}{56}\text{Ba}_{82}) = 5,1 \text{ b} \gg \sigma(n + \frac{138}{56}\text{Ba}_{82} \rightarrow \frac{139}{56}\text{Ba}_{83}) = 0,35 \text{ b}$   
 oder  $\sigma(n + \frac{207}{82}\text{Pb}_{125} \rightarrow \frac{208}{82}\text{Pb}_{126}) = 0,7 \text{ b} \gg \sigma(n + \frac{208}{82}\text{Pb}_{126} \rightarrow \frac{209}{82}\text{Pb}_{127}) = 0,0005 \text{ b}$ .

Die zwei letzteren Eigenschaften sind ähnlich entsprechenden chemischen Eigenschaften der Ele-

<sup>(28)</sup>Dabei wird der Produktkern  $\frac{A+1}{Z}(\ )_{N+1}$  oft in einem angeregten Zustand oder sogar instabil sein.

mente bei den „magischen Zahlen“ (2, 10, 18, 36, 54, 86) des atomaren Periodensystems: Wegen ihrer abgeschlossenen Valenzschalen haben die Edelgase, die eine „magische Elektronenzahl“ besitzen, eine höhere Anregungsenergie als ihre Nachbarn; außerdem können sie nahezu keine chemische Verbindungen eingehen, d.h. die Valenzelektronen koppeln sich nicht zu den Elektronen anderer Atome. Umgekehrt sind die Halogene (F, Cl, Br, I) — d.h. Elemente mit Elektronenzahl um eins kleiner als eine magische Zahl — sehr elektronegativ, um ihre Valenzschale abzuschließen.

Diese Analogie mit der Atomphysik suggeriert die Existenz von ähnlichen Schalen im Atomkern: die magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen sollen dann das Abschließen eines durch Protonen bzw. Neutronen besetzten Energieniveaus signalisieren.

## II.4.2 Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns

Wie in der Einleitung zum Abschnitt erläutert wurde, beruht die theoretische Beschreibung des Atomkerns als Reihenfolge von Protonen- und Neutronenschalen auf dem Begriff eines mittleren Ein-Teilchen-Potentials für die Nukleonen. Das unterliegende Prinzip wird erstens in § II.4.2 a dargelegt und einfache Ansätze für das Potential in § II.4.2 b vorgeschlagen. Die Entstehung magischer Zahlen wird am Beispiel des dreidimensionalen Kastenpotentials erläutert (§ II.4.2 c), indem das entsprechende quantenmechanische Problem ausführlich gelöst wird. Dann werden zwei andere Potentiale diskutiert (§ II.4.2 d), die die richtigen magischen Zahlen aber noch nicht liefern.

### II.4.2 a Mittleres Potential

Der Atomkern ist ein System aus  $A$  miteinander wechselwirkenden Nukleonen —  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen. Somit besteht die Gesamtenergie des Systems aus der Summe der einzelnen kinetischen Energien der Bestandteile und der potentiellen Energien für alle möglichen Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen. Dies entspricht quantenmechanisch einem Hamilton-Operator

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^A \hat{T}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq A} \hat{V}_{ij} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq A} \hat{V}_{ijk} + \dots \quad (\text{II.19})$$

Dabei bezeichnet  $\hat{T}_i$  den kinetische Energieoperator für Teilchen  $i$ : unter der Annahme, dass die Nukleonen nicht-relativistisch sind — was mit dem in Abschn. II.3 gefundenen Wert der Fermi-Energie plausibel aussieht —, gilt  $\hat{T}_i = \hat{p}_i^2 / 2m_i$  mit  $\hat{p}_i$  bzw.  $m_i$  dem Impulsoperator bzw. der Masse des Teilchens. Die Terme  $\hat{V}_{ij}$ ,  $\hat{V}_{ijk}$  entsprechen Zwei- bzw. Drei-Teilchen-Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen, summiert über alle möglichen Paare bzw. Triplets.

**Bemerkung:**  $\hat{V}_{ij}$  beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen, und enthält somit das starke Nukleon–Nukleon Potential, das sich prinzipiell aus Streuexperimenten oder aus der Untersuchung des Deuterons gewinnen lässt, und einen elektromagnetischen Anteil: Coulomb-Abstoßung wenn  $i$  und  $j$  Protonen sind, sowie die Kopplung zwischen den magnetischen Dipolmomenten der zwei Nukleonen.  $\hat{V}_{ijk}$  entspricht echten Drei-Nukleonen-Kräften,<sup>(29)</sup> die in erster Näherung viel kleiner als die Zwei-Körper-Kräfte sind, für die Beschreibung bestimmter Kerne nötig sind — insbesondere, für sehr neutronenreiche Kerne wie  $^{24}\text{O}$  [41] oder  $^{48}\text{Ca}$  [42].

Bei Gl. (II.19) handelt es sich um den Hamilton-Operator eines *Vielteilchenproblems*, dessen exakte Lösung eine sehr komplizierte Aufgabe darstellt. In der Tat ist das Problem nur für sehr besondere Wahlen der Wechselwirkungsterme möglich. Stattdessen löst man in erster Näherung ein vereinfachtes Problem, das sich wie folgt erhalten lässt. Erstens wird  $\hat{H}_{\text{Kern}}$  umschrieben als

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^A [\hat{T}_i + V(\hat{r}_i)] + \left[ \sum_{i < j} \hat{V}_{ij} + \sum_{i < j < k} \hat{V}_{ijk} - \sum_i V(\hat{r}_i) \right] \equiv \sum_{i=1}^A \hat{h}_i + \hat{V}_{\text{Rest}}, \quad (\text{II.20})$$

wobei  $\hat{h}_i \equiv \hat{T}_i + V(\hat{r}_i)$  jetzt ein Einteilchen-Hamilton-Operator ist.

Die Umschreibung ist nur nützlich, wenn die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

<sup>(29)</sup>Dabei handelt es sich um Kräfte, die sich nicht auf die Zwei-Körper-Kräfte zwischen allen Paaren reduzieren lassen.



- $V(\vec{r}_i)$  ist ein ortsabhängiges mittleres Potential, das für alle Nukleonen des Kerns identisch sein muss. Somit haben alle  $\hat{h}_i$  denselben Ausdruck.
- die Restwechselwirkung  $V_{\text{Rest}}$  kann vernachlässigt werden.

Unter letzterer Bedingung wird das ursprüngliche  $A$ -Teilchenproblem zu  $A$  unabhängigen Einteilchenproblemen, d.h. der Atomkern wird jetzt durch ein *Einzelteilchenmodell* beschrieben.

Das Prinzip der Berechnung ist dann jenes des auch in der Atomphysik benutzten selbstkonsistenten Hartree–Fock-Verfahrens:<sup>(30)</sup>

- Erstens soll man ein gutes Potential finden, z.B. schrittweise:  $V(\vec{r})$  wird zuerst geraten, dann wird das zugehörige  $\hat{V}_{\text{rest}}$  numerisch berechnet und  $V(\vec{r})$  modifiziert, bis  $\hat{V}_{\text{rest}}$  „klein“ ist (s. zweite Bemerkung unten).

- Zweitens löst man die Schrödinger-Gleichung mit Hamilton-Operator  $\hat{h} \equiv \hat{h}_i$ , um die Wellenfunktion eines im durch  $V(\vec{r})$  erzeugten Potentialtopf eingeschlossenen Nukleons zu finden.

- Drittens wird der Kern gebildet: die Protonen bzw. Neutronen besetzen die gefundenen Einteilchen-Zustände unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips, denn Protonen und Neutronen sind ununterscheidbare Fermionen. Beispielsweise sind im Grundzustand des Atomkerns nur die tiefstmöglichen Ein-Teilchen-Energiezustände besetzt.

Hier sollte der Vollständigkeit halber ein bisschen mehr über  $A$ -Teilchen-Wellenfunktionen kommen.

Z.B.: die Wellenfunktion des gesamten Kerns ist durch das antisymmetrisierte Produkt der Nukleonenwellenfunktionen gegeben.

Hiernach werden wir den ersten Schritt nicht explizit machen, sondern werden wir einfache mittlere Potentiale postulieren, um den zweiten und den dritten Schritt zu illustrieren. Insbesondere werden wir im Rest des § II.4.2 und in § II.4.3 nur (näherungsweise) sphärische Atomkerne betrachten, entsprechend kugelsymmetrischen mittleren Potentialen. Dagegen erfordert die Beschreibung (stark) deformierter Kerne nicht-kugelsymmetrische Potentiale, die natürlich viel schwieriger zu behandeln sind.

#### Bemerkungen:

\* Anstatt eines mittleren Potentials für alle Nukleonen ist es sinnvoller, unterschiedliche mittlere Potentiale für Protonen und Neutronen anzunehmen. Das Proton und das Neutron haben nämlich (leicht) unterschiedliche Massen, so dass ihre kinetische Energien schon unterschiedlich sind. Dazu unterliegen Protonen und Neutronen nicht denselben Wechselwirkungen, wie kurz nach Gl. (II.19) bemerkt wurde. Somit soll der rechte Glied von Gl. (II.20) durch

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^Z \hat{h}_i^{(p)} + \sum_{i=1}^N \hat{h}_i^{(n)} + \hat{V}_{\text{Rest}} \quad \text{mit} \quad \hat{h}_i^{(p)} \equiv \frac{\hat{p}_i^2}{2m_p} + V^{(p)}(\hat{r}_i), \quad \hat{h}_i^{(n)} \equiv \frac{\hat{p}_i^2}{2m_n} + V^{(n)}(\hat{r}_i). \quad (\text{II.21})$$

ersetzt werden, wobei  $V^{(p)}$  bzw.  $V^{(n)}$  das gleiche für alle Protonen bzw. Neutronen ist,  $V^{(p)}$  und  $V^{(n)}$  aber unterschiedlich sind.

\* Eigentlich ist  $\hat{V}_{\text{rest}}$  ein Operator auf dem Hilbert-Raum des  $A$ -Teilchen-Problems und kann somit nicht als „klein“ betrachtet werden. Was klein sein kann, sind die Matrixelemente von  $\hat{V}_{\text{rest}}$  zwischen bestimmten  $A$ -Teilchen-Zuständen, insbesondere zwischen den durch das Lösen des Problems ohne  $\hat{V}_{\text{rest}}$  erhaltenen Energie-Eigenzuständen. Diese Matrixelemente sollen klein gegenüber jene von  $\sum_i \hat{h}_i$  sein, was möglicherweise nur in einem begrenzten Energiebereich gelten kann.<sup>(31)</sup> Damit lässt sich ein bestimmtes mittleres Potential nur akzeptieren bzw. verwerfen, nachdem die zweite und dritte Schritte durchgelaufen sind, nicht schon im ersten Schritt.

<sup>(30)</sup>Eine Einführung in die Grundlagen der Methode ist z.B. in Ref. [43] zu finden.

<sup>(31)</sup>Es kann auch passieren, dass die Eigenzustände von  $\sum_i \hat{h}_i$  für gewisse Observablen schlechte Erwartungswerte liefern, die mit experimentellen Ergebnissen nicht passen.

\* In praktischen numerischen Berechnungen wird die Restwechselwirkung nicht ganz vernachlässigt, sondern in einem vierten Schritt — also nachdem das mittlere Potential optimiert wurde — als eine Störung behandelt. Dieser Term spielt nämlich eine wichtige Rolle, indem er die Entartung zwischen Zuständen mit unterschiedlichem Spin aufhebt und die experimentell beobachtete paarweise Kopplung der Protonen bzw. Neutronen einer Schale erklärt.

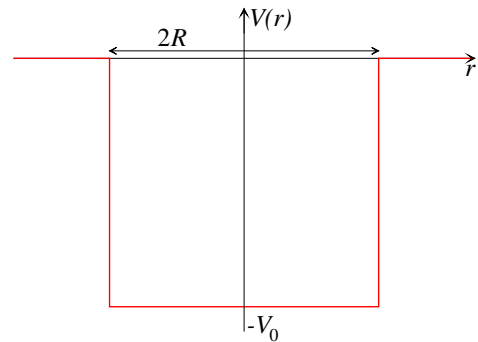
### II.4.2 b Wahl des effektiven Potentials

Ein wichtiger Punkt im oben beschriebenen Verfahren ist die Wahl des Ein-Teilchen-Potentials, in dem die Nukleonen eingeschlossen werden. Im Folgenden werden drei mögliche Modelle untersucht, die kugelsymmetrische Kerne beschreiben. Diese Potentiale werden mindestens durch eine den Kernradius spiegelnde Reichweite  $R$  und eine Tiefe  $-V_0$  charakterisiert, wobei  $V_0 \approx 50$  MeV wie im Fermi-Gas-Modell.

- Kastenpotential (II.22)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Unrealistisch kann auch das Potential unendlich für  $r > R$  angenommen werden.



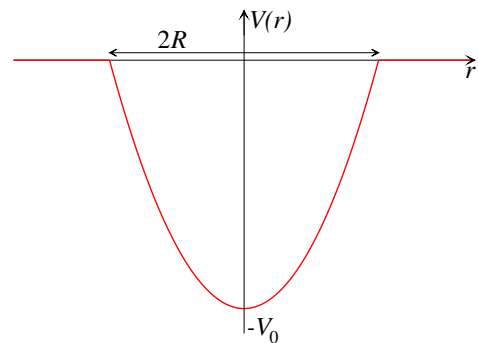
- harmonischer Oszillator (II.23)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Berechnungen sind einfacher wenn die Form

$$V(r) = -V_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

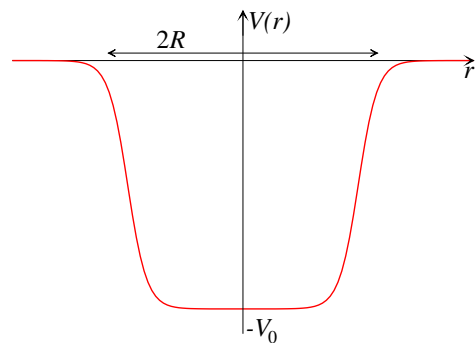
für einen beliebigen Abstand  $r$  gilt.



- Woods-Saxon Potential (II.24)

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\delta}}}$$

$\delta \approx 0,5$  fm bestimmt die Breite des Kernrands.



Das Woods-Saxon Potential ist realistischer — es spiegelt offensichtlich die gemessene Dichteverteilung (I.20) der Nukleonen in Kernen mit  $A \geq 20$  —, es erfordert aber die Nutzung eines numerischen Lösungsverfahrens. Umgekehrt sind das Kasten- bzw. das Oszillatorpotential zwar vereinfachte Näherungen, jedoch existieren analytische Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines Nukleons in solchen Potentialen, was einen besseren Einblick in den Ursprung der verschiedenen Eigenschaften des Modells erlaubt, insbesondere in die nötigen Bestandteile, um beobachtete Kerneigenschaften wiederzugeben.

Um den Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in Betracht zu ziehen werden unterschiedliche Potentialtöpfe angenommen: in erster Näherung, dieselben Potentiale mit unterschiedli-

chen Tiefen  $V_0^{(p)} \neq V_0^{(n)}$ .

### II.4.2c Einfachstes Beispiel: Kastenpotential

In diesem Paragraph werden die möglichen stabilen Ein-Teilchen-Zustände eines Teilchens im dreidimensionalen Kastenpotential (II.22) festgelegt, insbesondere deren Eigenenergien, welche die „Schalen“ der entsprechenden  $A$ -Teilchen-Zustände bestimmt. Dafür soll man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in Anwesenheit des Potentials lösen.

Da das Potential kugelsymmetrisch ist und nur vom Ort abhängt, kommutiert der Hamilton-Operator  $\hat{h}$  mit den quadrierten Bahndrehimpuls  $\vec{L}^2$  und Spin  $\vec{S}^2$  des Nukleons, sowie mit deren Projektionen auf einer festen Achse  $\hat{L}_z$  bzw.  $\hat{S}_z$ . Daher ist  $\{\hat{h}, \vec{L}^2, \hat{L}_z, \vec{S}^2, \hat{S}_z\}$  ein vollständiger Satz kommutierender Observablen, deren Erwartungswerte die Ein-Teilchen-Eigenzustände völlig charakterisieren werden.<sup>(32)</sup> Dabei werden, wie üblich, die Eigenwerte des Hamilton-Operators  $\hat{h}$  — d.h. die Ein-Teilchen-Eigenenergien — durch eine Hauptquantenzahl  $n \in \mathbb{N}^*$  gekennzeichnet, und die Eigenwerte von  $\vec{L}^2$  bzw.  $\hat{L}_z$  durch ganzzahlige Quantenzahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  bzw.  $m_\ell \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$ , vgl. Anhang ??.

**Bemerkung:** In der Kernphysik wird, wie in der Atomphysik, die spektroskopische Bezeichnungsweise benutzt, so dass ein s-, p-, d-, f-, g-, h-Zustand einen Zustand mit jeweils  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  andeutet. Im Gegensatz zur Atomphysik ist die azimutale Quantenzahl  $\ell$  in der Kernphysik nicht auf Werte kleiner als  $n$  beschränkt, sondern kann größer sein, wie unten zu sehen sein wird.

In Ortsdarstellung lautet der kinetische Energieoperator  $\hat{T}_i = -(\hbar^2/2m_i)\hat{\Delta}$ , mit  $\Delta$  dem Laplace-Operator. Somit lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein im Potential (II.22) eingeschlossenes Proton bzw. Neutron, beschrieben durch die Wellenfunktion  $\psi^{(p)}(\vec{r})$  bzw.  $\psi^{(n)}(\vec{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta\psi^{(j)}(\vec{r}) - V_0^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) = \varepsilon^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) \quad \text{für } |\vec{r}| \leq R, \quad (\text{II.25})$$

wobei  $j = p$  oder  $n$ , während  $\varepsilon^{(j)}$  die Energie des Ein-Teilchen-Zustands  $\psi^{(j)}(\vec{r})$  darstellt.

Hiernach werden nur gebundene Nukleonen ins Betracht gezogen, sodass außer des Potentialtopfs  $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$ , entsprechend einer verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Streng genommen ist diese Bedingung wenn  $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = 0$  nicht erfüllt, sondern nur wenn  $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = +\infty$ , was von jetzt an angenommen wird.<sup>(33)</sup>

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems ist es günstig, Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  zu benutzen. Dazu ist es möglich, die Radial- und Winkelabhängigkeiten der Wellenfunktion eines Nukleons zu trennen („Separationsansatz“). Somit kann die letztere als

$$\psi^{(j)}(\vec{r}) = R_{n\ell}^{(j)}(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \quad (\text{II.26})$$

geschrieben werden, wobei  $n, \ell$  und  $m_\ell$  ganze Zahlen sind und der Winkelanteil  $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$  eine Kugelflächenfunktion bezeichnet (Anhang ??). Mit diesem Ansatz führt der Ausdruck des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\hat{\Delta}f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r f(\vec{r})] - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\hbar^2} \vec{L}^2 f(\vec{r})$$

unter Verwendung der Eigenwertgleichung (??) für jeden Wert von  $\ell$  zu den  $m_\ell$ -unabhängigen linearen Differentialgleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j} \left[ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{n\ell}^{(j)}(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{n\ell}^{(j)}(r) \right] = (\varepsilon^{(j)} + V_0^{(j)}) R_{n\ell}^{(j)}(r), \quad (\text{II.27a})$$

<sup>(32)</sup> Der Erwartungswert von  $\vec{S}^2$  ist für alle Eigenzustände derselbe, und zwar  $\frac{3}{4}\hbar^2$ , da alle Protonen und Nukleon denselben Spin  $s = \frac{1}{2}$  haben. Deshalb erlaubt dieser Erwartungswert keine Unterscheidung zwischen den Zuständen und wird im Folgenden von deren Kennzeichnung ausgelassen.

<sup>(33)</sup> Die Herleitung der Eigenenergien und -zustände in diesem vereinfachten Fall befindet sich in manchem Lehrbuch der Quantenmechanik, z.B. in Fließbach [44, Kap. 25].

$n$	$X_{n0}$	$X_{n1}$	$X_{n2}$	$X_{n3}$	$X_{n4}$	$X_{n5}$	$X_{n6}$
1	3,1416	4,4934	5,7635	6,9879	8,1826	9,3558	10,5128
2	6,2832	7,7253	9,0950	10,4171	11,7049	12,9665	14,2074
3	9,4248	10,9041	12,3229	13,6980	15,0397	16,3547	17,6480
4	12,5664	14,0662	15,5146	16,9236	18,3013	19,6532	20,9835

**Tabelle II.1** – Erste Nullstellen der sphärischen Besselfunktionen  $j_0$  bis  $j_6$ .

wobei ein globaler Faktor  $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$  schon ausfaktorisiert wurde: somit wird das Problem auf ein eindimensionales Problem reduziert. Außerdem gelten die Randbedingungen

$$R_{n\ell}^{(j)}(0) < \infty : \quad \text{die Lösung soll in } r = 0 \text{ regulär sein;} \quad (\text{II.27b})$$

$$R_{n\ell}^{(j)}(R) = 0 : \quad \text{die Lösung soll bei } r = R \text{ kontinuierlich sein.} \quad (\text{II.27c})$$

Die erste dieser Bedingungen entspricht der nötigen Endlichkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi^{(j)}|^2 \propto (R_{n\ell}^{(j)})^2$ , insbesondere im Ursprungspunkt  $\vec{r} = \vec{0}$ , während die zweite Bedingung aus der Forderung  $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$  außerhalb des Bereichs  $r \leq R$  folgt.

Der Einfachheit halber kann man zuerst die s-Zustände betrachten, d.h. den Fall  $\ell = 0$ : die Differentialgleichung (II.27a) lautet dann (von jetzt an wird der Index  $j$  der Kürze halber ausgelassen)

$$\frac{d^2}{dr^2} (rR_{n0}(r)) + \frac{2m\tilde{\varepsilon}}{\hbar^2} (rR_{n0}(r)) = 0$$

mit  $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon + V_0$ . Eine bei  $r=0$  reguläre Lösung [Bedingung (II.27b)] ist

$$R_{n0}(r) = C \frac{\sin k_{n0}r}{k_{n0}r} \quad \text{mit} \quad k_{n0}^2 = \frac{2m\tilde{\varepsilon}_{n0}}{\hbar^2}$$

und  $C$  einer Normierungskonstante, deren Ausdruck in der späteren Diskussion nicht benötigt wird. Damit die Lösung bei  $r = R$  eine Nullstelle hat [Randbedingung (II.27c)] soll  $k_{n0}$  nur die diskreten Werte  $k_{n0} = n\pi/R$  annehmen, wobei  $n$  die *Hauptquantenzahl* ist, sodass die möglichen Energien der Zustände quantisiert sind:

$$\tilde{\varepsilon}_{n0} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{R^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{II.28})$$

$\tilde{\varepsilon}_{n0}$  ist daher die Energie (in Bezug auf die Tiefe  $-V_0$  des Potentialtopfs) des auf dem  $ns$ -Zustand stehenden Nukleons.

**Bemerkung:** Der Wellenvektor  $k_{00}$  mit  $n = 0$  führt zu  $\psi(\vec{r}) = 0$  überall und entspricht daher keiner physikalisch relevanten Lösung.

Für eine beliebige *azimutale Quantenzahl*  $\ell$  lautet eine reguläre Lösung der Gleichung (II.27a)

$$R_{n\ell}(r) = j_\ell(k_{n\ell}r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_{n\ell}r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(k_{n\ell}r),$$

wobei  $j_\ell(x)$  bzw.  $J_{\ell+1/2}(x)$  eine *sphärische Besselfunktion* bzw. eine *Besselfunktion halbzahliger Ordnung* bezeichnet.<sup>(34)</sup> Wie im Fall  $\ell = 0$  oben ist  $k_{n\ell}$  durch die Randbedingung (II.27c) festgelegt: die Wellenfunktion verschwindet bei  $r = R$  nur wenn  $k_{n\ell}R$  eine Nullstelle der sphärischen Besselfunktion  $j_\ell$  ist, d.h. nur für  $k_{n\ell} = X_{n\ell}/R$ , wobei  $X_{n\ell}$  die  $n$ -te Nullstelle von  $j_\ell$  bezeichnet (s. Tabelle II.1). Die entsprechende Energie des im Potentialtopf eingeschlossenen Nukleons ist

<sup>(34)</sup>Die ersten sphärischen Besselfunktionen sind

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}.$$

Ihre Nullstellen kleiner als 15 werden in der Tabelle II.1 gegeben, vgl. auch Refs. [45, Kap. 10] oder [46, Kap. 10].

$$\tilde{\epsilon}_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{X_{nl}}{R} \right)^2. \tag{II.29}$$

Wie oben gesagt sind die Zustände durch die Erwartungswerte der Observablen  $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z\}$  charakterisiert, d.h. durch die zugehörigen Quantenzahlen  $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$ : die möglichen Energiewerten (II.29) hängen nur von  $n$  und  $\ell$  ab. Für feste  $\ell$  ist dann die *magnetische Quantenzahl*  $m_\ell \in \{-\ell, \dots, \ell\}$ , während der Erwartungswert der Projektion  $\hat{S}_z$  des Nukleonspins auf der  $z$ -Achse die Werte  $\pm \frac{1}{2}\hbar$  annehmen kann, entsprechend  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Insgesamt gibt es also auf dem  $(n, \ell)$ -Energieniveau  $2 \times (2\ell + 1)$  entartete Zustände.

Die Anordnung der möglichen Zustände nach wachsender Energie  $\tilde{\epsilon}_{nl}$  bzw. wachsendem Wert der Nullstelle  $X_{nl}$  wird in der Tabelle II.2 mit dem zugehörigen Entartungsgrad des Niveaus gegeben, sowie die Summe der Anzahlen von Zustände. Die entsprechenden Energieniveaus im Potentialtopf sind in Abb. II.10 dargestellt.

$(n, \ell)$	$X_{nl}$	Anzahl der Zustände auf dem Niveau	$\sum_{n,\ell} 2(2\ell + 1)$
1s	3, 14	2	2
1p	4, 49	6	8
1d	5, 76	10	18
2s	6, 28	2	20
1f	6.99	14	34
2p	7, 73	6	40
1g	8, 18	18	58
2d	9, 10	10	68
1h	9, 36	22	90
3s	9, 42	2	92
2f	10, 42	14	106
⋮	⋮	⋮	⋮

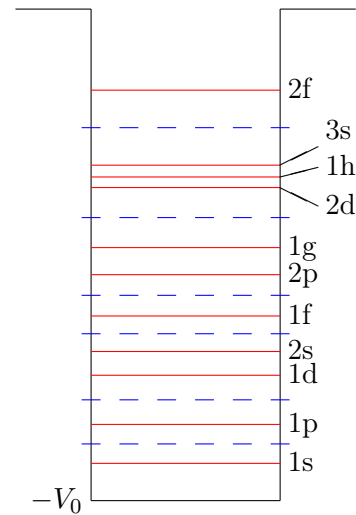


Abbildung II.10: Energieniveaus der Nukleonen in einem Kastenpotential.

Tabelle II.2: Termschema im Kastenpotential (II.22).

In diesem Termschema kommt manchmal eine größere Energielücke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Niveaus vor, sodass die nötige Energie, um ein Nukleon vom niedrigeren auf das höher liegende Niveau anzuregen, ebenfalls groß ist. Umgekehrt liegen mehrere Niveaus nah voneinander, z.B. 1d und 2s, 2p und 1g, oder 2d, 1h und 3s: in solchen Fällen ist die Anregungsenergie relativ gering. Dies führt zur Idee, dass diese dicht liegenden Niveaus eine Schale zusammen bilden. Die magischen Zahlen treten dann nur beim Abschluss entweder einer solchen „Composite-Schale“ oder eines isolierten Niveaus auf: so findet man 2, 8, 20, 34, 58, 92, 138...

Die ersten drei experimentell beobachteten magischen Zahlen 2, 8, 20 werden offensichtlich gut erklärt! Es fehlen aber 28, 50, 82 und 126.

#### II.4.2 d Oszillator- und Woods–Saxon-Potential

Das Problem bei den höheren magischen Zahlen könnte vermutlich mithilfe eines besseren Ansatzes für den Ein-Teilchen-Potentialtopf gelöst werden.

Im Fall des dreidimensionalen Oszillatorpotentials (II.23) findet man äquidistante Ein-Teilchen-Niveaus mit der Energie  $\tilde{\epsilon}_{nl} = [2(n - 1) + \ell + \frac{3}{2}]\hbar\omega$ , wobei  $\omega^2 \equiv 2V_0/mR^2$ . Der Entartungsgrad der Niveaus wächst schnell: auf dem  $N$ -ten Niveau ( $N \in \mathbb{N}$ ) sitzen alle mögliche  $(n, \ell)$ -Zustände mit  $2(n - 1) + \ell = N$  und jeder  $(n, \ell)$ -Zustand ist wie oben  $2(2\ell + 1)$ -mal entartet. Die daraus folgenden

magischen Zahlen sind dann 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168... Die Reihenfolge der Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist in der Tabelle II.3 bzw. in Abb. II.11 dargestellt. Dabei kann man merken, dass alle Zustände auf einem gegebenen Niveau dieselbe Parität besitzen, und zwar abwechselnd positiv und negativ.

$(n, \ell)$	$\tilde{\epsilon}_{n\ell}$	Entartungsgrad des Niveaus	$\sum_{n,\ell} 2(2\ell + 1)$
1s	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	2	2
1p	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	6	8
2s, 1d	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	12	20
2p, 1f	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	20	40
3s, 2d, 1g	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	30	70
3p, 2f, 1h	$\frac{13}{2}\hbar\omega$	42	112
4s, 3d, 2g, 1i	$\frac{15}{2}\hbar\omega$	56	168
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

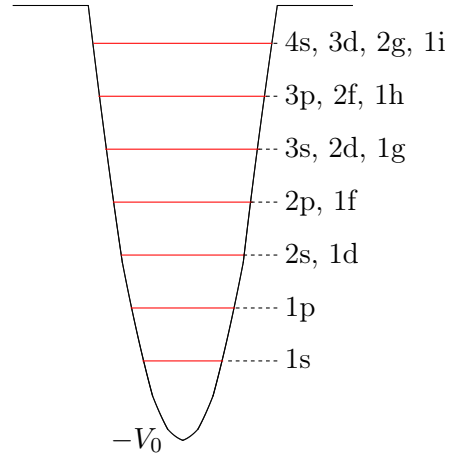


Abbildung II.11: Energieniveaus im Oszillatorpotential.

Tabelle II.3: Termschema im Oszillatorpotential (II.23).

Die übliche Herleitung der Energieniveaus des eindimensionalen harmonischen Oszillators beruht auf der Nutzung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$ .<sup>(35)</sup> Die Umschreibung des Potentials (II.23) in kartesischen Koordinaten als Summe dreier unabhängigen eindimensionalen Oszillatoren liefert dann sofort die Eigenzustände und Eigenenergien des dreidimensionalen Oszillators.

Eine direkte Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten in demselben Sinne als die oben dargestellte Lösung des Kastenpotentials ist auch möglich, vgl. z.B. Fließbach [44, Kap. 28].

Im Woods–Saxon Potential (II.24) ist die Anordnung der Ein-Teilchen-Zustände 1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 2p, 1g, 2d, 3s, 1h, 2f, 3p, 1i, 2g... mit den magischen Zahlen 2, 8, 20, 40 (oberhalb der 2p-Schale), 58 (oberhalb der 1g-Schale), 92, 138... Die ersten drei Zahlen werden abermals gut wiedergegeben, dennoch fehlen wieder die nächsten.

Die erfolgreiche Erklärung von 2, 8 und 20 mit allen Potentialen bestätigt die Gültigkeit des dem Einteilchen-Schalenmodell zugrunde liegenden Prinzips, dass die magischen Zahlen den Abschluss von Schalen unabhängiger Nukleonen in einem Potentialtopf spiegeln.

Der Grund des Scheiterns bei den höheren Zahlen lässt sich aus der Analysis der drei obigen einfachen Potentiale (II.22)–(II.24) ahnen. Somit wird das Problem wahrscheinlich durch den großen Entartungsgrad  $2(2\ell + 1)$  der  $(n, \ell)$ -Niveaus verursacht. Zum Beispiel kommt in allen drei Modellen nach dem 2s-Niveau das 14-mal entartete 1f-Niveau vor, was das Auftauchen der magischen Zahl 28 verhindert. Andere „natürliche“ Potentialforme könnten hierbei nicht weiter helfen, solange die Entartung der Zustände mit denselben  $(n, \ell)$  nicht aufgehoben wird.

### II.4.3 Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung

Das Problem des richtigen Abschließens der Nukleonenschale wurde unabhängig voneinander einerseits durch Maria Goeppert-Mayer [49, 50], andererseits durch J. Hans D. Jensen und seine Mitarbeiter [51] gelöst. Ihre Idee war, die Entartung der  $(n, \ell)$ -Zustände durch die Einführung eines zusätzlichen Beitrags zum Ein-Teilchen-Potential aufzuheben.

<sup>(35)</sup>Diese Herleitung ist in jedem Lehrbuch der Quantenmechanik zu finden, z.B. in Cohen-Tannoudji [47, Kap. V], Fließbach [44, Kap. 34] oder Messiah [48, Kap. 12].

Die Natur dieses zusätzlichen Terms wurde noch einmal durch die Analogie zur Atomphysik suggeriert: In der Atomhülle ergibt die Kopplung zwischen dem Spin und dem Bahndrehimpuls eines Elektrons die geringe „Feinstruktur“-Aufspaltung dessen Energieniveaus. Die durch die Kernkräfte verursachte Aufspaltung der Nukleonen-Energieniveaus erwies sich erstaunlicherweise als verhältnismäßig viel größer. Somit kann diese Kopplung das Niveauschema erheblich modifizieren.

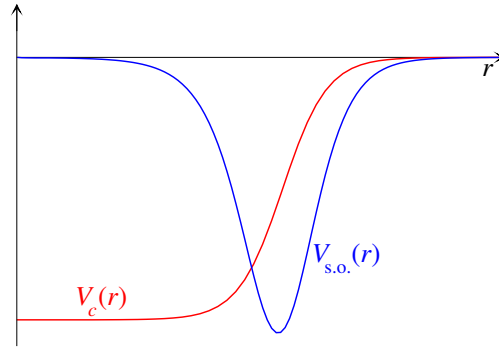
Bezeichnet man das kugelsymmetrische Ein-Teilchen-Potential von § II.4.2 als  $V_c(r)$ , so lautet das neue zu betrachtende effektive Potential

$$\hat{V}(r) = V_c(r) + V_{s.o.}(r) \hat{L} \cdot \hat{S}, \tag{II.30}$$

wobei  $\hat{L}$  bzw.  $\hat{S}$  der Bahndrehimpuls- bzw. der Spin-Operator des Nukleons ist. Die Radialfunktion  $V_{s.o.}(r)$  bestimmt die Stärke der Kopplung zwischen Spin und Bahndrehimpuls. Ein üblicher Ansatz für  $V_{s.o.}(r)$  in Berechnungen ist, in Analogie zum „Thomas“-Term in der Atomhülle,<sup>(36)</sup>

$$V_{s.o.}(r) \propto \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr}, \tag{II.31}$$

wobei die Proportionalitätskonstante negativ ist. Abbildung II.12 stellt diese Abhängigkeit im Fall eines Woods-Saxon-Potentials  $V_c(r)$  dar:  $V_{s.o.}$  ist relativ klein im inneren Teil des Atomkerns und trägt vor allem am Kernrand bei. Dabei ist das Ziel, die tiefstliegenden Niveaus wenig zu stören, um die magischen Zahlen 2, 8, 20 im neuen Energieschema zu erhalten.



**Abbildung II.12** – Woods-Saxon Potential (II.24) zusammen mit dem durch Gl. (II.31) gegebenen entsprechenden Radialterm des Spin-Bahn Potentials.

Nach Einführung des zusätzlichen  $(\hat{L} \cdot \hat{S})$ -Terms kommutieren  $\hat{L}$  und  $\hat{S}$  nicht mehr mit dem neuen Hamilton-Operator, sodass ihre Erwartungswerte nicht mehr Konstanten der Bewegung sind. Dementsprechend lassen sich die Eigenzustände nicht mehr durch die Quantenzahlen  $m_\ell$  und  $m_s$  charakterisieren. Ein neuer vollständiger Satz kommutierender Observablen ist dann<sup>(37)</sup>

$$\{\hat{h}, \hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\},$$

wobei  $\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}$  der Gesamtdrehimpuls des Nukleons ist. Der mit  $\hat{J}^2$  bzw.  $\hat{J}_z$  assoziierte Eigenwert wird durch eine neue Quantenzahl  $j$  bzw.  $m_j$  charakterisiert und beträgt  $j(j + 1)\hbar^2$  bzw.  $m_j\hbar$ .

Die Kopplung des Bahndrehimpulses  $\hat{L}$  und des Spins  $\hat{S}$  führt je nach ihren relativen Orientierungen zu zwei möglichen Werten der *Gesamtdrehimpulsquantenzahl*  $j$ :

- wenn der Nukleonspin parallel zu seinem Drehimpuls ist, gilt  $j = \ell + \frac{1}{2}$ ; daher kann  $m_j$  die  $2\ell + 2$  verschiedenen Werte  $-\ell - \frac{1}{2}, \dots, \ell + \frac{1}{2}$  annehmen.
- wenn  $\vec{S}$  und  $\vec{L}$  antiparallel sind, ergibt sich  $j = \ell - \frac{1}{2}$ ; dann gibt es  $2\ell$  mögliche Werte für  $m_j$ .

<sup>(36)</sup>Die Spin-Bahn Kopplung der Elektronenhülle wird durch die Bewegung des Elektrons im elektrischen Feld des Atomkerns verursacht: das rotierende Elektron spürt ein Magnetfeld, zu dem sein Spin koppelt. Der daraus folgende Spin-Bahn-Term lässt sich im Rahmen der Quantenelektrodynamik berechnen, vgl. z.B. Ref. [52, Kap, IV § 33].

<sup>(37)</sup>Die Bemerkung der Fußnote 32 bleibt hier auch gültig: alle Nukleonen haben den Spin  $s = \frac{1}{2}$ .

Die Energie des auf den Wert 1 normierten Eigenzustands  $|n, \ell, j, m_j\rangle$  lautet

$$\langle n, \ell, j, m_j | \hat{h} | n, \ell, j, m_j \rangle = \langle n, \ell, j, m_j | \hat{V}_c | n, \ell, j, m_j \rangle + V_{s.o.} \langle n, \ell, j, m_j | \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} | n, \ell, j, m_j \rangle,$$

wobei der Beitrag des  $V_c$ -Terms in erster Näherung derselbe bleibt ( $\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$ ), wie in § II.4.2 schon berechnet wurde, und hängt somit nur von  $n$  und  $\ell$  ab. Die durch den Spin-Bahn-Kopplungsterm induzierte Verschiebung des Energieniveaus für die beiden Fälle  $j = \ell + \frac{1}{2}$  und  $j = \ell - \frac{1}{2}$  lässt sich mithilfe der Beziehung  $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$  leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \langle n, \ell, j, m_j | \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} | n, \ell, j, m_j \rangle &= \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \hbar^2 \langle n, \ell, j, m_j | n, \ell, j, m_j \rangle \\ &= \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Daher ist die Ein-Teilchen-Energie jetzt gegeben durch

$$\tilde{\varepsilon}_{nlj} \simeq \tilde{\varepsilon}_{n\ell} + \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell \langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) \langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

wobei  $\langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell}$  den Erwartungswert im  $n\ell$ -Zustand des radialen Anteils des Spin-Bahn-Terms bezeichnet.

Experimentell gilt für diesen Radialanteil  $V_{s.o.}(r) < 0$ , was natürlich zu einem ebenfalls negativen Erwartungswert führt. Deshalb liegen die Zustände mit höherer Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $j = \ell + \frac{1}{2}$  energetisch niedriger – d.h. sie sind stärker im Potential gebunden – als diejenigen mit kleinerer  $j = \ell - \frac{1}{2}$ . Dies stellt das gegenseitige Verhalten zur Wirkung der Spin-Bahn Kopplung in der Elektronenhülle eines Atoms dar.

Aus Gl. (II.32) ergibt sich die Aufspaltung der Energieniveaus mit  $j_+ = \ell + \frac{1}{2}$  und  $j_- = \ell - \frac{1}{2}$  bei festen Werten von  $n$  und  $\ell$ :

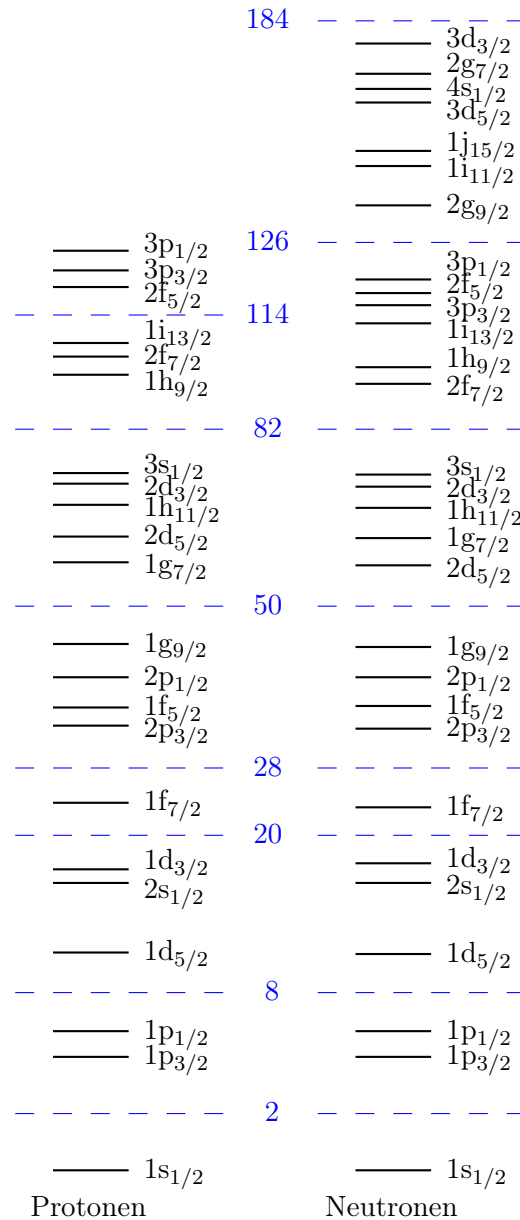
$$\Delta\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}_{nlj_-} - \tilde{\varepsilon}_{nlj_+} \propto 2\ell + 1.$$

Diese Aufspaltung wächst daher mit zunehmender Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell$  des Nukleons. Zur Kennzeichnung der neuen  $j$ -Abhängigkeit der Energieniveaus wird die Quantenzahl  $j$  der bisher benutzten Schreibweise als tiefgestellter Index beigefügt.

Beispielsweise wird die 1f-Schale durch die Spin-Bahn-Kopplung in zwei Niveaus aufgespalten: mit der höheren Energie kommt das 6-mal entartete  $1f_{5/2}$ -Niveau vor; tiefer liegt das stärker gebundene  $1f_{7/2}$ -Niveau mit 8 Zuständen. Somit wird 28 zu einer magischen Zahl! Ebenfalls führt die Aufspaltung der 1g- und 1h-Niveaus in  $1g_{7/2}$  und  $1g_{5/2}$  bzw.  $1h_{7/2}$  und  $1h_{9/2}$  zu den magischen Zahlen 50 und 82, wie in Abb. II.13 gezeigt wird.

Durch die Einführung unterschiedlicher Potentialtiefen  $V_0^{(p)}$  und  $V_0^{(n)}$  im mittleren Potential und nach Berücksichtigung des zusätzlichen Coulomb-Potentials für die Protonen treten unterschiedliche Energieniveaus für Protonen und Neutronen auf. Beispielsweise werden die Ordnungen der  $1g_{7/2}$  und  $2d_{5/2}$  in den beiden Reihen umgetauscht. Die ungleichen Potentiale können außerdem wie in Abb. II.13 möglicherweise zu unterschiedlichen magischen Zahlen bei den höchstliegenden Niveaus führen.





**Abbildung II.13** – Einteilchen-Energieniveaus in einem realistischen Woods–Saxon Potential unter Berücksichtigung der Spin-Bahn Kopplung.

### II.4.4 Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

#### II.4.4 a Kernspin und Parität im Grundzustand

Im Grundzustand des Atomkerns sind zunächst die tiefsten Nukleonenschalen völlig besetzt, so dass nur das höchste gefüllte Energieniveau möglicherweise nicht voll ist. Die abgeschlossenen  $j$ -Schalen, die  $2j + 1$  Protonen bzw. Neutronen enthalten, liefern keinen Beitrag weder zum Gesamtdrehimpuls des Kerns noch zu seiner Parität:

- Die Projektionen  $J_z = -j\hbar, (-j + 1)\hbar, \dots, (j - 1)\hbar, j\hbar$  des Gesamtdrehimpulses der verschiedenen Nukleonen der Schale kompensieren sich gegenseitig, und tragen deshalb nicht zu  $J_{\text{Kern}}$  bei.

- Da  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$  halbzahlig ist, ist die Zahl  $2j + 1$  der Nukleonen auf der Schale gerade, sodass das Produkt der individuellen Paritäten  $(-1)^\ell$  der Nukleonen insgesamt  $+1$  ergibt.

Dieses Ergebnis führt sofort zu den folgenden Vorhersagen:

- Atomkerne, deren letzte besetzte Protonen- und Neutronenschalen abgeschlossen sind, haben

Spin und Parität  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = 0^+$ .

Experimentell stimmt das: z.B.  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{16}_8\text{O}) = 0^+$ .

- Wegen der angenommenen Unabhängigkeit der Nukleonen im Potential haben die ug- bzw. gu-Kerne, bei denen es nur ein Proton bzw. Neutron außerhalb einer abgeschlossenen  $j$ -Schale gibt, genau den Spin und die Parität dieses ungepaarten Nukleons.  
Experimentell stimmt das auch: z.B. ist für  $^{17}_8\text{O}$ , mit einem einzelnen Neutron auf der  $1d_{5/2}$ -Schale,  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = \frac{5}{2}^+$ .
- Analog bestimmt ein einzelnes isoliertes *Loch*, entsprechend einem fehlenden Nukleon, Spin und Parität der ug- oder gu-Kerne, bei denen ein einziges Proton bzw. Neutron auf der letzten besetzten Schale fehlt.  
Abermals stimmt das mit den Messdaten: z.B.  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{15}_8\text{O}) = \frac{1}{2}^-$ , mit einem Loch in der Neutronen- $1p_{1/2}$ -Schale.

Bei Kernen mit teilweise gefüllten Schalen kann das Einzelteilchen-Schalenmodell nicht weiter helfen. Experimentelle Beobachtungen und das Berücksichtigen der Restwechselwirkung  $V_{\text{Rest}}$  — entsprechend einer Abweichung vom Ein-Teilchen-Problem — motivieren einen zusätzlichen Ansatz:

Sobald zwei Protonen bzw. zwei Neutronen in der gleichen Schale gebunden sind, koppeln sie zum energetisch bevorzugten Zustand mit Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0}$ .

Dieser Ansatz erlaubt weitere Vorhersagen:

- gg-Kerne haben Spin und Parität  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = 0^+$ ; diese Vorhersage ist experimentell bestätigt. <sup>(38)</sup>
- ug- und gu-Kerne haben den Spin und die Parität des ungepaarten Nukleons  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = j^{(-1)^{\ell}}$ . Dies stimmt auch sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen (s. Ref. [24] oder Ref. [8, Experimente 56-57]), bis auf Abweichungen bei Kernen mit  $150 \lesssim A \lesssim 200$ .

**Bemerkung:** Der oben eingeführte Ansatz reicht nicht aus, um Vorhersagen für den Spin und die Parität eines uu-Kerns zu erlauben. Um die gemessenen Eigenschaften zu erklären ( $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^2_1\text{H}) = 1^+$ ,  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^6_3\text{Li}) = 1^+$ ,  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{10}_5\text{B}) = 3^+$ ,  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{14}_7\text{N}) = 1^+$  für die stabilen Nuklide) werden in der Literatur die sog. starke und schwache *Nordheim Regeln* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [5]).

#### II.4.4 b Kernspin und Parität angeregter Zustände

Im Grundzustand besetzen die Nukleonen die niedrigsten Energieniveaus im Potentialtopf. Oberhalb liegen weitere Niveaus, auf welche die Nukleonen durch Energiezufuhr versetzt werden können: der Atomkern ist dann in einem angeregten Zustand.

Das hier dargelegte Ein-Teilchen-Schalenmodell liefert zuverlässige Voraussagen nur für den Fall eines ug- oder gu-Kerns mit im Grundzustand einem einzelnen Nukleon auf der angefangenen Schale, das auf die nächste Schale angeregt wird, während die abgeschlossenen Schalen ungestört bleiben. Dann bestimmt dieses Nukleon den Spin und die Parität des angeregten Kerns — sowie des Grundzustands, wie oben gesehen.

Zum Beispiel hat der erste angeregte Zustand des  $^{17}_8\text{O}$ -Kerns Spin und Parität  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{17}_8\text{O}^*) = \frac{1}{2}^+$ : das ungepaarte Neutron wird von der  $1d_{5/2}$  auf die  $2s_{1/2}$  versetzt.

#### II.4.4 c Elektrische Dipol- und Quadrupolmomente

##### Elektrisches Dipolmoment

Dem Schalenmodell nach besitzen Atomkerne eine definierte Parität unter Raumspiegelung, d.h. ihre Wellenfunktion ist Eigenzustand zum Paritätsoperator:  $\hat{P}\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r}) = \Psi_{\text{Kern}}(-\vec{r}) = \pm\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r})$ . Infolgedessen ist deren Ladungsdichteverteilung  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = Ze\Psi_{\text{Kern}}^*(\vec{r})\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r})$  invariant unter der Transformation  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ .

<sup>(38)</sup> ... was natürlich ist, denn der zugrunde liegende Ansatz basiert auf den experimentellen Fakten!

Aus der Definition (I.28) des elektrischen Dipolmoments ergibt sich dann sofort<sup>(39)</sup>  $\vec{D} = -\vec{D}$ , d.h.  $\vec{D} = \vec{0}$ : Kerne sollten kein elektrisches Dipolmoment haben, was experimentell bestätigt ist. Beispielsweise ist die obere experimentelle Grenze für den Wert des elektrischen Dipolmoments des Protons  $|\vec{D}| < 0,54 \cdot 10^{-10} e \text{ fm}$  [28], während die „natürliche“ Größenordnung für eine Verteilung mit der Ausdehnung  $\approx 1 \text{ fm}$  und der Ladung  $e$  wäre  $\approx 1 e \text{ fm}$ .

### Elektrisches Quadrupolmoment

Das elektrische Quadrupolmoment charakterisiert die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelgestalt (§ I.4.3). Bei kugelsymmetrischen Kernen soll daher dieses Moment verschwinden, was experimentell bestätigt wird: gg-Kerne besitzen kein elektrisches Quadrupolmoment.

Für einen ug-Kern mit einer Protonenzahl  $Z$  um eins größer (bzw. kleiner) als eine magische Zahl sollte die  $zz$ -Komponente des elektrischen Quadrupolmoments  $Q_{zz}$  negativ (bzw. positiv) sein, weil das zusätzliche (bzw. fehlende) Proton die sonst kugelsymmetrische Ladungsverteilung in der äquatoriale Zone des Kerns vergrößert (bzw. verringert), wobei die  $z$ -Achse die Richtung des Kernspins ist. Dabei stellt die angenommene Unabhängigkeit der Nukleonen sicher, dass das zusätzliche bzw. fehlende Proton die durch die anderen Protonen erzeugte Ladungsverteilung nicht stört, so dass diese kugelsymmetrisch bleibt. Diese Vorhersage wird ebenfalls experimentell bestätigt, wie in Abb. II.9 gezeigt wurde.

Im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells können auch die absoluten Werte des elektrischen Quadrupolmoments berechnet werden, indem man die mithilfe der Nukleonwellenfunktionen gebildete Wellenfunktion des Kerns in Gl. (I.29) einsetzt. Die so berechneten  $|Q_{zz}|$ -Werte sind aber meist erheblich niedriger als die gemessenen Werte, d.h. die Verformungen der Kerne sind größer, als was im Modell gefunden wird. Dies ist leicht verständlich, denn das hier hergeleitete Modell beruht eigentlich auf den Ansatz sphärischer Kerne, sodass Abweichungen von der Kugelsymmetrie natürlich nicht gut können beschrieben werden. Eine zufriedenstellende Beschreibung deformierter Kerne erfordert von Anfang an die Nutzung eines mittleren Potentials ohne sphärische Symmetrie, wie im *Nilsson-Modell* des Kerns.<sup>(40)</sup>

Dem Einteilchen-Schalenmodell nach sollten alle gu-Kerne kein elektrisches Quadrupolmoment haben, weil ihre Protonen zu einem verschwindenden Gesamtdrehimpuls koppeln, d.h. kugelsymmetrisch verteilt sind, während die Neutronen keine elektrische Ladung besitzen, und daher zum elektrischen Quadrupolmoment nicht beitragen sollten. Tatsächlich haben aber die gu-Kerne  $Q_{zz} \neq 0$ : die Annahme, dass die sphärische Verteilung der Protonen durch die asymmetrische Neutronenverteilung nicht gestört wird, wird durch das Experiment nicht bestätigt. Hier handelt es sich noch um einen Effekt der vernachlässigten Zwei-Teilchen-Restwechselwirkungen, und zwar hier von Proton-Neutron-Kräften.

**Bemerkung:** In Abb. II.9 sind besonders große elektrische Quadrupolmomente  $Q_{zz} > 1 e \text{ barn}$  bei Atomkernen mit  $63 \leq Z \leq 75$  zu sehen, die Massenzahlen  $150 \lesssim A \lesssim 190$  entsprechen. Diese stark deformierten Kerne sind genau diejenigen, bei denen Spin und Parität von den im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells vorhergesagten Werten abweichen. Dies ist natürlich kein Zufall: die Beschreibung eines deformierten Kerns erfordert ein ebenfalls deformiertes mittleres Potential, somit sind die nutzbaren Quantenzahlen diejenigen, die mit den Projektionen des Nukleonbahndrehimpulses und -Spins auf die Symmetrieachse des Potentials assoziiert sind.

#### II.4.4 d Magnetisches Dipolmoment

Das Ein-Teilchen-Schalenmodell beruht auf der Annahme, dass die Nukleonen im Atomkern unabhängig voneinander sind. Infolgedessen wird das magnetische Dipolmoment  $\vec{\mu}_{\text{Kern}}$  des Kerns einfach durch die Summe der Dipolmomente  $\vec{\mu}$  der Nukleonen gegeben.

<sup>(39)</sup>Der Beweis folgt aus der mathematischen Substitution  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  im Integral, das  $\vec{D}$  definiert.

<sup>(40)</sup>Vgl. in Ref. [43] ein Beispiel für ein deformiertes Potential.

### Magnetisches Dipolmoment eines einzelnen Nukleons im Kern

Daher kann man zuerst das magnetische Dipolmoment  $\vec{\mu}$  eines einzelnen Nukleons betrachten. Zwei Drehimpulse tragen zu  $\vec{\mu}$  bei, und zwar der Bahndrehimpuls des Nukleons und sein Spin (§I.4.3 b):

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_L + \hat{\vec{\mu}}_S = \mu_N \frac{g_L \hat{\vec{L}} + g_S \hat{\vec{S}}}{\hbar}, \quad (\text{II.33})$$

wobei die Landé-Faktoren  $g_L$  und  $g_S$  vom Typ des Nukleons abhängen.

Gleichung (II.33) lässt sich sofort als

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[ (g_L + g_S)(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}) + (g_L - g_S)(\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{S}}) \right]$$

umschreiben. Das Skalarprodukt mit  $\hat{\vec{J}}$  lautet dann

$$\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[ (g_L + g_S)\hat{J}^2 + (g_L - g_S)(\hat{L}^2 - \hat{S}^2) \right].$$

Wie oben gesehen sind  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{S}^2$  und  $\hat{J}^2$  kommutierende Observablen, deren Erwartungswerte den Zustand des Nukleons charakterisieren. Es ergibt sich einfach:

$$\langle \hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} \rangle = \frac{\mu_N}{2} \left[ (g_L + g_S)j(j+1) + (g_L - g_S)(\ell - s)(\ell + s + 1) \right] \hbar, \quad (\text{II.34})$$

wobei die Identität  $\ell(\ell+1) - s(s+1) = (\ell-s)(\ell+s+1)$  benutzt wurde.

### Magnetisches Dipolmoment des gesamten Kern

Mithilfe der Ergebnisse für ein einzelnes Nukleon kann die durch Gl. (I.33) gegebene Projektion des magnetischen Dipolmoments des Kerns auf seinen Spin sofort berechnet werden:

- Bei gg-Kernen verschwindet der Kernspin  $J_{\text{Kern}}$ , sodass  $\mu_{\text{Kern}} = 0$ .
- Bei ug- und gu-Kernen bestimmt das ungepaarte Nukleon das gesamte magnetische Dipolmoment des Kerns, denn die anderen Nukleonen koppeln zum Gesamtdrehimpuls  $J = 0$  und folglich  $\mu = 0$ . Dann ist das Dipolmoment des Nukleons durch Gl. (II.33) gegeben, mit

$$\begin{aligned} \text{– für ein ungepaartes Proton: } & \begin{cases} \vec{\mu}_L = \mu_N \frac{\vec{L}}{\hbar} & \text{d.h. } g_L = 1; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{wobei } g_S = 5,59. \end{cases} \\ \text{– für ein ungepaartes Neutron: } & \begin{cases} \vec{\mu}_L = \vec{0} & \text{d.h. } g_L = 0 \text{ (keine elektrische Ladung!);} \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{mit } g_S = -3,83. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Vergleich zwischen der praktischen Definition (I.33) des magnetischen Dipolmoments des Kerns und Gl. (II.34) gibt dann für einen Atomkern mit einem ungepaarten Nukleon auf der  $(n, \ell, j)$ -Schale:

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[ \frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{(\ell - s)(\ell + s + 1)}{j + 1} \right]. \quad (\text{II.35})$$

Für ein Nukleon gilt  $s = \frac{1}{2}$ , sodass  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ . Gleichung (II.35) gibt also zwei Möglichkeiten für jeden Nukleontyp:

**Fall A:**  $j = \ell + \frac{1}{2}$  (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind parallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[ \frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)(j - 1) \right] = \mu_N \left[ g_L j - \frac{1}{2}(g_L - g_S) \right]; \quad (\text{II.36})$$

**Fall B:**  $j = \ell - \frac{1}{2}$  (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind antiparallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[ \frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)\frac{j(j+2)}{j+1} \right] = \mu_N \left[ g_L j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)\frac{j}{j+1} \right] \quad (\text{II.37})$$

Mit den jeweiligen Landé-Faktoren des Protons bzw. des Neutrons führen Gl. (II.36) und (II.37) zu den sog. *Schmidt-Linien* [in der  $(j - \mu_{\text{Kern}})$ -Ebene] für das magnetische Moment eines Kerns mit einem ungepaarten Proton bzw. Neutron:

$$\text{– ug-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} \mu_N(j+2, 29) & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ \mu_N\left(j-2, 29\frac{j}{j+1}\right) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (\text{II.38a})$$

$$\text{– gu-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} -1, 91\mu_N & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ +1, 91\frac{j}{j+1}\mu_N & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.38b})$$

Experimentell liegen die magnetischen Dipolmomente praktisch aller ug- bzw. gu-Kerne zwischen den durch Gl. (II.38a) bzw. (II.38b) definierten Schmidt-Linien, d.h. das Schalenmodell ist relativ erfolgreich. Da die Dipolmomente aber nicht genau auf den Linien liegen, ist es nur ein Teilerfolg.

Bei näherer Betrachtung liegt die große Mehrheit der gemessenen magnetischen Dipolmomente für Kerne mit einem gegebenen Gesamtdrehimpuls  $j$  zwischen einerseits der durch Gl. (II.38) gegebenen relevanten Schmidt-Linie und andererseits der analogen Linie, die sich durch das Ersetzen des anomalen Landé-Faktors  $g_S$  des Nukleons durch  $g_S = 2$ , entsprechend dem erwarteten Wert für ein Elementarteilchen, ergibt. Im Fall der ug-Kerne mit  $j = \ell + \frac{1}{2}$  heißt das zum Beispiel, dass die gemessenen  $\mu_{\text{Kern}}$  zwischen den Linien  $\mu_N(j+2, 29)$  und  $\mu_N(j+0, 5)$  liegen.

- Das Einteilchen-Schalenmodell liefert keine Voraussage für das magnetische Dipolmoment der uu-Kerne.

#### II.4.4 e Insel der Stabilität

Jenseits der beobachteten maximalen magischen Neutronen- bzw. Protonenzahlen  $N = 126$  bzw.  $Z = 82$  sagen Modelle die Existenz weitere solche Zahlen vorher: 184 wäre die nächste magische Neutronenzahl und 114, 120 oder 126 die nächste magische Protonenzahl (der Wert hängt vom benutzten Modell), vgl. Abb. II.13. Atomkerne mit einer solchen Zahl hätten dann ähnliche Eigenschaften, wie bei Kernen mit einer kleineren magischen Zahl gemessen werden.

Insbesondere wären solche Kerne erheblich mehr stabil, als ihre unmittelbare Nachbarn. Da alle bekannten Nuklide schwerer als  $^{208}\text{Pb}$  instabil sind, heißt diese erhöhte Stabilität Kerne mit einer größeren mittleren Lebensdauer bzw. Halbwertszeit, oder sogar neue schwere stabile Kerne.

Diese mögliche „Insel“ von stabilen Kernen innerhalb des „Meers der Instabilität“ wird aktiv untersucht: Mithilfe Kollisionen von schweren Kernen wird versucht, neue superschwere Kerne zu erzeugen. Neue Elemente (Ende 2021, bis zur Massenzahl  $Z = 118$ ) werden tatsächlich erzeugt, bisher wurde aber kein eindeutiger Hinweis einer erhöhten Stabilität beobachtet. (Eine Übersicht über diese Experimente und deren Ergebnisse ist in Ref. [53] zu finden).

#### II.4.5 Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

- + Diskussion über mittlere freie Weglänge eines Nukleons im Kern [54]

# KAPITEL III

## Radioaktivität

---

III.1	Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz	57
III.1.1	Zerfallsgesetz	57
III.1.2	Radioaktivität als zufälliger Prozess	59
III.1.3	Radioaktive Zerfallsreihen	61
III.2	Natürlich vorkommende Radioisotope	65
III.3	Arten der Radioaktivität	67
III.3.1	Erhaltungsgrößen in Zerfällen	67
III.3.2	$\alpha$ -Zerfall	67
III.3.3	$\beta$ -Zerfall und verwandte Zerfälle	75
III.3.4	$\gamma$ -Zerfall	80
III.3.5	Andere Zerfallsarten	82
	Anhang zum Kapitel III	89
III.A	$\alpha$ -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit	89

---

Unter dem Begriff der Radioaktivität versteht man eine natürliche oder künstliche Kernumwandlung, wobei ein Ausgangsnuklid — hiernach auch „Mutterkern“ genannt — sich in ein Zerfallsprodukt — den „Tochterkern“ — durch die Emission von sog. „Strahlung“ umwandelt. Diese Kerntransmutation ist ein zufälliger Vorgang, der in erster Näherung durch äußere Umstände — wie die Temperatur, den Druck, ein elektrisches bzw. magnetisches Feld, usw. — nicht zu beeinflussen ist (s. Bemerkung unten). Wegen des Auftretens des Zufalls bei den einzelnen Prozessen genügt die Anzahl von radioaktiven Nukliden einer Substanz ein einfaches Zerfallsgesetz, das in Abschn. III.1 zusammen mit einigen Definitionen vorgestellt wird. Dort werden auch Zerfallsreihen diskutiert, die auftauchen, wenn das Produkt eines radioaktiven Zerfallsprozesses selbst instabil ist.

Radioaktive Atomkerne sind definitionsgemäß instabil und sollen daher irgendwann zerfallen, nichtsdestotrotz kommen jedoch ein paar davon in der Natur in messbarer Menge vor (Abschn. III.2). Einige solche Nuklide lassen sich für eine wichtige Anwendung der Radioaktivität verwenden, und zwar die Datierung der Entstehung von Substanzen bzw. Systemen. Schließlich befasst sich Abschn. III.3 mit den verschiedenen natürlich auftretenden Arten von radioaktiven Zerfallsprozessen bei Atomkernen.

**Bemerkung:** Einige der in diesem Kapitel diskutierten Prozesse können auch *induziert* werden, insbesondere solche, die durch die Existenz einer Potentialbarriere zwischen Anfangs- und Endzustand verzögert sind, und daher über Tunneleffekt stattfinden ( $\alpha$ -Zerfall, induzierte Spaltung... ). Dabei kann Energiezufuhr zu einer niedrigeren Barriere führen und somit die Zerfallswahrscheinlichkeit bzw. -rate erhöhen. Damit die Änderung signifikant ist, soll die zugeführte Energie der Ordnung 1–5 MeV pro Nuklid sein, entsprechend schon extremen — aus dem irdischen Gesichtspunkt — physikalischen Bedingungen wie z.B. Temperaturen von etwa  $1 \text{ MeV}/k_B \approx 10^{10} \text{ K}$ , weshalb Radioaktivität als „unabhängig von äußeren Umständen“ vorgestellt wird. Solche induzierten Prozesse, die neben dem Ausgangsnuklid noch die Anwesenheit eines weiteren Teilchens im Anfangszustand

voraussetzen, werden mit Ausnahme des Elektroneneinfangs (§III.3.3 c) nicht in diesem Kapitel behandelt.<sup>(41)</sup>

## III.1 Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz

Einige Überlegungen der ersten zwei Kapitel — über die ungleichen Bindungsenergien pro Nukleon von unterschiedlichen Kernen (§ I.3.2) oder die Möglichkeit, Nukleonen auf höhere Energieniveaus anzuregen (Abschn. II.4) — legen die Existenz von instabilen Nukliden nahe, aus denen die Nukleonen über irgendeinen Prozess in einen stabileren Zustand übergehen können. Solche instabilen Kerne werden als *radioaktiv* bezeichnet, oder auch *Radioisotope* bzw. *Radionuklide* genannt.

### III.1.1 Zerfallsgesetz

Aus Beobachtungen ermittelten Rutherford und Soddy 1902 das Gesetz der zeitlichen Abnahme der Anzahl von radioaktiven Nukliden einer bestimmten Spezies. Sei  $N(t)$  diese Zahl zum Zeitpunkt  $t$ . Im Zeitintervall  $dt$  zwischen  $t$  und  $t + dt$  sinkt  $N(t)$  gemäß dem *Zerfallsgesetz*

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt, \quad (\text{III.1})$$

unter den Gültigkeitsbedingungen  $N(t) \gg 1$  und  $dt \lesssim \mathcal{O}(1/\lambda)$ . Die Proportionalitätskonstante  $\lambda$  heißt *Zerfallskonstante* bzw. manchmal *Zerfallsrate*. Die Unabhängigkeit der Radioaktivität von den äußeren Umständen entspricht der Gleichmäßigkeit von  $\lambda$ .

**Bemerkung:** Das Gesetz (III.1) entspricht einfach einer Bilanzgleichung, die voraussetzt, dass sich die Anzahl der zerfallenden Nuklide nur über Zerfall ändert. Insbesondere werden hier die Kerne nicht durch einen anderen Prozess erzeugt.

Durch eine sofortige Integration führt das Zerfallsgesetz (III.1) zu

$$N(t) = N(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.2})$$

mit  $N_0 = N(0)$ .

Das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. (III.2) ist ein experimentelles Faktum. Unter relativ minimalen Ansätzen über den zugrundeliegenden Elementarprozess kann es möglicherweise „motiviert“ werden (vgl. § III.1.2).

#### III.1.1 a Mittlere Lebensdauer, Halbwertszeit

Die durchschnittliche Zeit,<sup>(42)</sup> nach der ein Kern einer mit der Zerfallskonstante  $\lambda$  gegebenen Spezies zerfällt, ist die sog. *mittlere Lebensdauer*.

Man betrachte eine Menge von  $N_0$  Kernen zur Zeit  $t = 0$ . Die  $-dN(t)$  Kerne, die zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + dt$  zerfallen, sind genau solche mit einer „Lebensdauer“  $t$  — genauer handelt es sich um deren Überlebensdauer. Somit wird die „mittlere“<sup>(42)</sup> Lebensdauer der bei  $t = 0$  anwesenden Kerne durch

$$\tau \equiv \frac{\int_0^{N_0} t dN(t)}{\int_0^{N_0} dN(t)} = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} t \lambda N(t) dt = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{III.3})$$

gegeben, wobei das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. die Abhängigkeit (III.2) in der zweiten bzw. dritten Gleichung benutzt wurde.

<sup>(41)</sup>Induzierte Spaltung wird im folgenden Kapitel (Abschn. IV.1) diskutiert.

<sup>(42)</sup>Eine sinnvolle statistische Deutung dieses Ausdrucks erfordert die Einführung einer Wahrscheinlichkeitsdichte, wie in Abschnitt III.1.2 stattfinden wird.

Als *Halbwertszeit* einer radioaktiven Substanz bezeichnet man die Zeitdauer  $T_{1/2}$ , während deren die Anzahl von radioaktiven Kernen um den Faktor  $\frac{1}{2}$  abnimmt. Mithilfe des Zerfallsgesetzes (III.2) ergibt sich einfach

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (\text{III.4})$$

### III.1.1 b Aktivität

In den meisten experimentellen Fällen werden weder die Anzahl von Kernen  $N(t)$  noch deren durch Gl. (III.1) gegebene Abnahme direkt gemessen. Stattdessen misst man eher die Anzahl der Zerfälle in einem Zeitintervall, sowie deren Nachlassen, durch die Detektion der zugehörigen emittierten Strahlung.

Die Anzahl von Zerfälle pro Zeiteinheit heißt *Aktivität* und wird durch

$$A(t) \equiv \lambda N(t) \quad (\text{III.5})$$

gegeben. Aus Gl. (III.2) folgt für die Aktivität einer Menge von zerfallenden Radionukliden, die nicht wieder erzeugt werden

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.6})$$

mit  $A_0 = A(0)$ , d.h. die Aktivität einer zerfallenden Substanz nimmt in diesem Fall exponentiell ab.

Die SI-Einheit der Aktivität ist das Becquerel (Bq):  $1 \text{ Bq} \equiv 1$  Zerfall pro Sekunde. (Eine veraltete Einheit ist  $1 \text{ Ci (Curie)} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ .)

Aus Messungen der Aktivität einer Kernspezies zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ergibt sich deren Zerfallskonstante  $\lambda$  einfach:

- bei  $t_1$  wird  $A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1}$  gemessen;
- und bei  $t_2$  ist die Aktivität  $A(t_2) = A_0 e^{-\lambda t_2}$ .

Dann lautet deren Verhältnis  $A(t_1)/A(t_2) = e^{-\lambda(t_1-t_2)}$ , woher die Zerfallskonstante sofort folgt:

$$\lambda = \frac{\ln[A(t_1)/A(t_2)]}{t_2 - t_1}.$$

**Bemerkung:** Der Vergleich der Form (III.2) des Zerfallsgesetzes mit der Zeitentwicklung (III.6) der Aktivität ergibt  $A(t) = -dN(t)/dt$ , was oft als Definition der Aktivität angenommen wird. Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Rate der Zerfälle und der Zeitableitung der Anzahl von Kernen gilt aber nur, wenn  $N(t)$  durch keinen anderen Prozess – wie z.B. die Zufuhr von zusätzlichen Kernen – beeinflusst wird. In § III.1.3 werden Beispiele von realistischen Fällen gegeben, in denen die Aktivität (III.5) von  $-dN/dt$  abweicht.

### III.1.1 c Zerfallskanäle

Ein gegebenes Nuklid weist oft mehrere Zerfallsarten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf; z.B. kann es durch entweder  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Emission zerfallen. Diese verschiedenen Möglichkeiten werden als *Zerfallskanäle* bezeichnet.

In einem solchen Fall wird für jeden Zerfallskanal  $i$  eine *differentielle Zerfallskonstante*  $\lambda_i$  definiert. Das Zerfallsgesetz lautet dann

$$dN(t) = - \sum_i \lambda_i N(t) dt. \quad (\text{III.7})$$

Im Vergleich zur Gl. (III.1) wird dann die *totale* Zerfallsrate durch  $\lambda = \sum_i \lambda_i$  gegeben.

Sinngemäß wird jedem vorhandenen Zerfallskanal eine differentielle mittlere Lebensdauer  $\tau_i$  bzw. Halbwertszeit  $T_{1/2,i}$  bzw. Aktivität  $A_i$  zugeordnet.



Das Verhältnis  $\lambda_i/\lambda$  einer partiellen Zerfallsrate zur gesamten Rate heißt *Verzweigungsverhältnis* (auf Englisch *branching ratio*, kurz BR).

**Bemerkung:** Falls eine Substanz verschiedene Zerfallskanäle hat, aber nur eine einzige Strahlungsart gemessen wird, so wird aus dem Nachlassen der Aktivität immer die totale Rate  $\lambda$  bestimmt.

Man betrachte z.B. eine Spezies, die  $i$ - und  $j$ -Strahlung mit jeweiligen Raten  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  emittiert. Sei angenommen, dass nur die Anzahl von  $i$ -Zerfälle gemessen wird, entsprechend der partiellen Aktivität  $A_i(t) = \lambda_i N(t)$ , während die  $j$ -Zerfälle nicht beobachtet werden, sodass deren Aktivität  $A_j(t)$  unbekannt ist. Die totale Aktivität, die der Abnahme der Anzahl von Kernen  $N(t)$  entspricht, lautet

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda_i N(t) + \lambda_j N(t) = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) \lambda N(t) = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) A(t),$$

$$\text{d.h. } A_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t).$$

Messungen der differentiellen Aktivität  $A_i$  zu verschiedenen Zeitpunkten liefern dann

- bei  $t_1$  :  $A_i(t_1) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_1)$  und
- bei  $t_2$  :  $A_i(t_2) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_2)$ ,

woher sich  $\ln \frac{A_i(t_1)}{A_i(t_2)} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \lambda(t_2 - t_1)$  ergibt, was zur Bestimmung von  $\lambda$  führt!  $\square$

Eine Messung der differentiellen Raten  $\lambda_i$ ,  $\lambda_j$  erfordert die Kenntnis des Verhältnisses der differentiellen Aktivitäten,  $A_i(t)/A_j(t) = \lambda_i/\lambda_j$ , was die Detektion der beiden Strahlungsarten erfordert.

### III.1.2 Radioaktivität als zufälliger Prozess

Das experimentell beobachtete Zerfallsgesetz lässt sich mithilfe einer Annahme über den der Radioaktivität zugrunde liegenden Elementarprozess „erklären“, und zwar unter Nutzung des „stets wie neu“ Ansatzes für das radioaktive Nuklid:

Die *bedingte* Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Kern bis zum Zeitpunkt  $t_0 + t$  überlebt, wenn er schon bis zum Zeitpunkt  $t_0$  überlebt hat, ist gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit, dass er vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt  $t$  überlebt.

**Bemerkung:** Die folgende Herleitung ist zwar mathematisch korrekt, sollte aber physikalisch vielleicht nicht zu ernsthaft genommen werden.

Mithilfe der Einführung einer *Zufallsvariable*  $T$  — die dem Zeitpunkt des Zerfalls entspricht — mit dem Zustandsraum  $[0, +\infty[$  und der Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}[T \leq t]$ , dass  $T$  einen Wert kleiner als die *Realisation*  $t$  annimmt, lautet der Ansatz

$$\mathcal{P}[T > t_0 + t | T > t_0] = \mathcal{P}[T > t] \quad \text{für } t, t_0 \geq 0. \quad (\text{III.8})$$

Natürlich ist  $\mathcal{P}[T > t] = 1 - \mathcal{P}[T \leq t]$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert größer als  $t$  annimmt. In Gl. (III.8) und im Folgenden bezeichnet  $\mathcal{P}[\mathbf{a} | \mathbf{b}]$  die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $\mathbf{a}$  auftritt, vorausgesetzt, das Ereignis  $\mathbf{b}$  aufgetreten ist. Dazu heißt  $\mathcal{P}[T > t]$  *Überlebensfunktion* der Variable  $t$ , während  $\mathcal{P}[T \leq t]$  die entsprechende *Verteilungsfunktion* von  $t$  ist.

#### Zufälliges Verhalten eines Atomkerns

Zuerst kann man beweisen, dass  $T$  eine exponentiell verteilte Zufallsvariable ist. Sei  $S$  eine Funktion der Variable  $t$ , die für beliebiges reelles  $t$  durch  $S(t) = \mathcal{P}[T > t]$  definiert wird.

- Da  $T$  nur positive Werte annehmen kann, ist  $S(t) = 1$  für  $t \leq 0$ .

- Für  $t, t_0 \geq 0$  gilt  $S(t + t_0) = \mathcal{P}[T > t + t_0] = \mathcal{P}[T > t + t_0] \frac{\mathcal{P}[T > t_0]}{\mathcal{P}[T > t_0]}$ .

Die Konjunktion  $(T > t + t_0) \wedge (T > t_0)$  ist gleich dem Ereignis  $(T > t_0)$ ; daher kann  $\mathcal{P}[T > t + t_0]$  durch  $\mathcal{P}[(T > t + t_0) \cup (T > t_0)]$  in diesem Ausdruck ersetzt werden.

Gemäß dem Bayes'schen Satz ist das Verhältnis dieser gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zu  $\mathcal{P}[T > t_0]$  die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}[T > t + t_0 | T > t_0]$ , die laut dem stets-wie-neu Ansatz (III.8) gleich  $\mathcal{P}[T > t]$  ist, sodass

$$S(t + t_0) = \mathcal{P}[T > t] \mathcal{P}[T > t_0] = S(t)S(t_0). \quad (\text{III.9})$$

Diese Identität ist (bis auf einige mathematische Feinheiten) die Charakterisierung der Exponentialfunktion, d.h. es existiert  $\lambda$ , sodass  $S(t) = e^{-\lambda t}$  für  $t \geq 0$ . Außerdem ist  $S(t)$  für jedes  $t$  definitionsgemäß eine Wahrscheinlichkeit, d.h.  $\lambda$  darf nicht negativ sein. Letztendlich ist die Zerfallszeit  $T$  nicht unendlich, sodass  $\lambda > 0$ .

Schließlich gilt somit

$$\mathcal{P}[T > t] = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad (\text{III.10})$$

d.h. die Lebensdauer  $T$  ist exponentiell verteilt mit dem Parameter  $\lambda > 0$ .

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

woher sich der Erwartungswert  $E[T] = \frac{1}{\lambda}$  und die Varianz  $V[T] = \frac{1}{\lambda^2}$  der Zufallsvariable  $T$  ergeben.

### Zufälliges Verhalten einer Atomkernmenge

Es seien jetzt  $N_0$  identische (instabile) Kerne zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Anzahl  $N(t)$  von Kernen, die bis zum Zeitpunkt  $t$  überleben, ist für  $t \geq 0$  eine Zufallsvariable.

Das Verhalten dieser Zufallsvariable — z.B. die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}[N(t) = k]$ , dass  $k$  Kerne zum Zeitpunkt  $t$  noch überleben — hängt von der oben hergeleiteten Überlebensfunktion eines Kerns  $S(t) = e^{-\lambda t}$  ab.

Dabei braucht man genau gesagt eine weitere Annahme, und zwar, dass die Zerfallszeiten  $t_1, t_2, \dots$  der verschiedenen Kerne Realisationen von *statistisch unabhängigen* Zufallsvariablen (mit derselben Überlebensfunktion  $S(t)$ ) sind. Dann hat jeder einzelne Kern die Wahrscheinlichkeit  $S(t)$ , bis zum Zeitpunkt  $t$  zu überleben, bzw. die Wahrscheinlichkeit  $1 - S(t)$ , vor dem Zeitpunkt  $t$  zu zerfallen, sodass die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}[N(t) = k]$  durch die Binomialverteilung mit den Parametern  $N_0$  und  $e^{-\lambda t}$  gegeben ist:

$$\mathcal{P}[N(t) = k] = \begin{cases} \binom{N_0}{k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{N_0 - k} & \text{für } k = 0, 1, \dots, N_0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Aus bekannten Eigenschaften der Binomialverteilung ist dann der Erwartungswert von  $N(t)$

$$E[N(t)] = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.12})$$

zusammen mit der Varianz  $V[N(t)] = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})$ .

Der Erwartungswert (III.12) entspricht offensichtlich dem Zerfallsgesetz (III.2)! Letzteres beschreibt also das „mittlere Verhalten“ von der Anzahl  $N(t)$  der bei  $t$  noch anwesenden Kerne.

Analog findet man, dass die Anzahl  $D(t)$  von Kernen, die bis zum Zeitpunkt  $t$  zerfallen, mit den Parametern  $N_0$  und  $1 - e^{-\lambda t}$  binomialverteilt ist,<sup>(43)</sup> sodass  $E[D(t)] = N_0(1 - e^{-\lambda t})$ , deren Ableitung

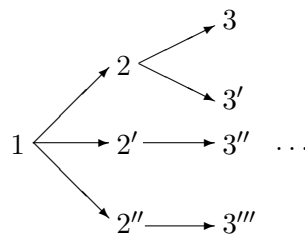
$$\frac{d}{dt}E[D(t)] = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

die „Rate der Zerfälle zum Zeitpunkt  $t$ “ (d.h. die Aktivität) ergibt.

### III.1.3 Radioaktive Zerfallsreihen

Das Produkt eines radioaktiven Zerfalls kann selbst instabil sein und später zerfallen, und so weiter, sodass ganze *Zerfallsreihen*  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$  entstehen können. Beispielsweise führen drei lange Zerfallsreihen von den instabilen aber langlebigen Nukliden  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  nach etwa 10–15 Stufen zu stabilen Isotopen von Blei (s. auch Abschn. III.2).

Im allgemeinsten Fall existieren sogar bei jeder Generation verschiedene Zerfallskanäle. Somit tauchen Verzweigungen in die Zerfallskette auf:



Dazu können Zerfallsprodukte auf unterschiedlichen Zweigen eigentlich identisch sein, z.B. könnten  $3'$  und  $3''$  gleich sein, so dass verschiedene Wege von einem Ausgangs- zu einem Endnuklid führen können.

Unter Betrachtung dieser Möglichkeiten lässt sich dann fragen, wie viele Kerne es von irgendeinem Element als Funktion der Zeit gibt?

Die Antwort zu dieser Frage ist ziemlich einfach, vorausgesetzt die elementare Ab- bzw. Zunahme der Anzahl der Kerne einer gegebenen Art im Zeitelement  $dt$  mithilfe vom Zerfallsgesetz (III.7) unter Berücksichtigung der „Erhaltung der Materie“ — genauer handelt es sich dabei um die Erhaltung der durch die Protonen und Neutronen getragenen Baryonenzahl — sorgfältig geschrieben wird.

Ein einfaches Beispiel bildet die Zerfallsreihe mit als erste Stufe dem Zerfall  $1 \rightarrow 2$ , mit gesamter Zerfallskonstante  $\lambda_1$  und Verzweigungsverhältnis  $f_{12}$ , und als zweite Stufe dem Zerfall  $2 \rightarrow \dots$  mit der totalen Zerfallsrate  $\lambda_2$ . Wie entwickeln sich dann  $N_1(t)$  und  $N_2(t)$ ? (Hier werden die Entwicklungen der anderen Tochterkerne  $2'$ ,  $2'' \dots$  sowie der Produkte des Zerfalls  $2 \rightarrow \dots$  nicht betrachtet.)

Das Zerfallsgesetz (III.1) gibt für den Zerfall der Kerne vom Typ 1

$$dN_1(t) = -\lambda_1 N_1(t) dt \quad \Rightarrow \quad N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Die  $dN_1(t)$  zerfallenden Typ-1 Nuklide führen zu  $f_{12} dN_1(t)$  Kernen vom Typ 2 — sowie in die andere Kanäle zu  $(1 - f_{12}) dN_1(t)$  Kernen einer anderen Art —, deren darauffolgende Zerfall durch Gl. (III.1) beschrieben wird, sodass die Änderung zwischen  $t$  und  $t + dt$  der Anzahl von Typ-2 Kernen durch

$$dN_2(t) = \lambda_1 f_{12} N_1(t) dt - \lambda_2 N_2(t) dt$$

gegeben wird. Unter Berücksichtigung der gefundenen Form für  $N_1(t)$  liefert diese Bilanzgleichung die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t). \quad (\text{III.13})$$

<sup>(43)</sup>Dies folgt sofort von der trivialen Identität (in eindeutiger Schreibweise)  $\mathcal{P}[D(t) = k] = \mathcal{P}[N(t) = N_0 - k]$ .

Diese lässt sich in zwei Schritten lösen:

- Die allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung  $\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t)$  ist  $N_2(t) = c_2 e^{-\lambda_2 t}$ , wobei  $c_2$  eine Konstante ist;

- eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (III.13) ergibt sich durch „Variation der Konstanten“: das Einsetzen des Ansatzes  $N_2(t) = c_2(t) e^{-\lambda_2 t}$  in Gl. (III.13) lautet

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{dc_2(t)}{dt} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t}.$$

Die Integration der daraus folgenden Zeitableitung  $dc_2(t)/dt$  liefert sofort

$$c_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + K_2,$$

wobei  $K_2$  eine Konstante ist. Man erhält also

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + K_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Die unbekannte Konstante lässt sich mithilfe der Bedingung bei  $t = 0$  berechnen:

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) + K_2$$

sodass schließlich

$$N_2(t) = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (\text{III.14})$$

Im Folgenden wird diese Lösung für verschiedene mögliche Verhältnisse zwischen den Zerfallskonstanten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  studiert. Der Einfachheit halber wird nur der Fall  $N_2(0) = 0$  betrachtet.

- **Fall a:**  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  d.h.  $\tau_1 \ll \tau_2$ : der Anstieg der Tochterkernmenge ist schneller als ihr Zerfall.

Dies ist z.B. der Fall für die  $^{131}_{52}\text{Te} \xrightarrow{\beta^-} ^{131}_{53}\text{I} \xrightarrow{\beta^-} ^{131}_{54}\text{Xe}$ -Zerfallskette: die jeweiligen Halbwertszeiten sind  $T_{1/2}(^{131}\text{Te}) = 25 \text{ mn} \ll T_{1/2}(^{131}\text{I}) = 8 \text{ d}$  (Tage).

Die Anzahl von Tochterkernen (III.14) lautet

$$N_2(t) \sim \begin{cases} \lambda_1 f_{12} N_1(0) t & \text{für } t \ll \tau_1; \\ f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} & \text{für } t \gg \tau_1. \end{cases}$$

$N_2(t)$  wächst zuerst linear mit der Zeit  $t$  – was die bei kleinen Zeiten fast lineare Abnahme von  $N_1(t)$  spiegelt –, dann sinkt bei großen Zeiten exponentiell mit der Zerfallskonstante  $\lambda_2$ . Dieses Verhalten wird in Abb. III.1 dargestellt.

- **Fall b:**  $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$  d.h.  $\tau_1 \gtrsim \tau_2$ .

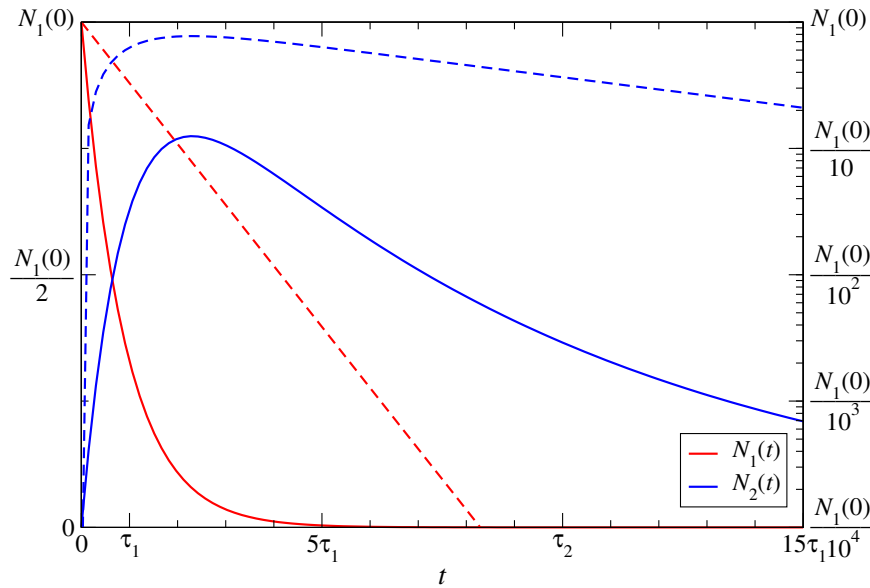
Beispielsweise  $^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} ^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} ^{140}_{58}\text{Ce}$ :  $T_{1/2}(^{140}\text{Ba}) = 12,75 \text{ d}$ ,  $T_{1/2}(^{140}\text{La}) = 1,68 \text{ d}$ .

Aus Gl. (III.14) ergibt sich

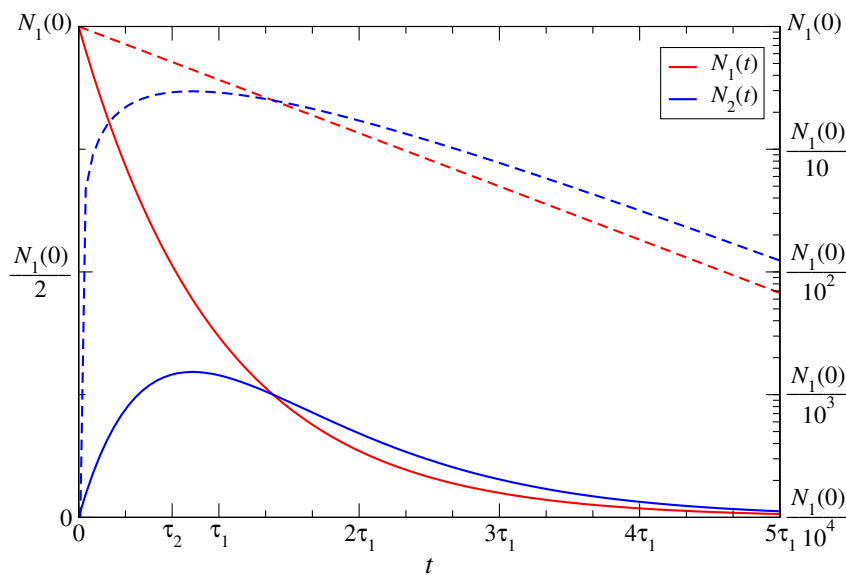
$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(t) \text{ für } t \gg \tau_1,$$

d.h. das Verhältnis der Anzahlen von Tochter- und Mutterkernen  $N_2(t)/N_1(t)$  ist für  $t \gg \tau_1$  ungefähr konstant: man spricht von einem *transienten Gleichgewicht*, d.h. einem sich zeitlich ändernden Gleichgewicht.

Folglich nehmen die beiden Kernarten mit derselben Rate  $\lambda_1$  ab, wie in Abb. III.2 dargestellt wird: in logarithmischer Skala (Strichlinien) sind  $N_1(t)$  und  $N_2(t)$  für  $t \gg \tau_1$  Geraden mit derselben Steigung.



**Abbildung III.1** – Entwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen  $N_1(t)$  bzw.  $N_2(t)$  im Fall  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  (genauer gesagt  $\lambda_1 = 10\lambda_2$ ). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.



**Abbildung III.2** – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen  $N_1(t)$  bzw.  $N_2(t)$  im Fall  $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$  (hier  $\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2$ ). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

- **Fall c:**  $\lambda_1 \ll \lambda_2$  d.h.  $\tau_1 \gg \tau_2$ : der Mutterkern ist viel langlebiger als der Tochterkern.

Dieser Fall kommt insbesondere in den drei aus Aktinoiden stammenden natürlichen Zerfallsreihen (s. Abschn. III.2) häufig vor.

Z.B.  ${}_{92}^{238}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}_{90}^{234}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}_{91}^{234}\text{Pa}$ :  $T_{1/2}({}^{238}\text{U}) = 4,47 \cdot 10^9 \text{ a} \gg T_{1/2}({}^{234}\text{Th}) = 24,1 \text{ d}$ .

Dann ergibt sich

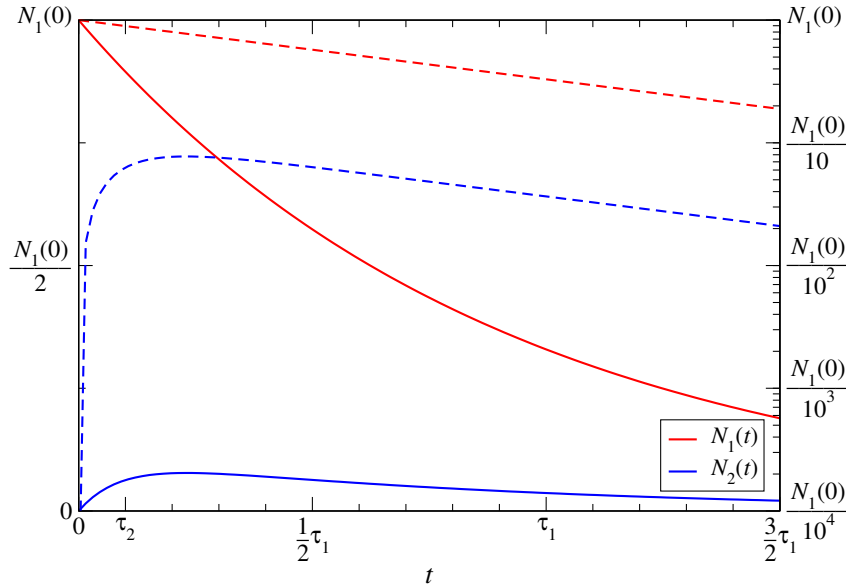
- für  $t \ll \tau_2$ :  $N_1(t) \sim N_1(0)$  und  $N_2(t) \sim \lambda_1 f_{12} N_1(0) t$ ;
- für  $\tau_2 \ll t \ll \tau_1$ :  $N_1(t) \sim N_1(0)$  und  $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) = \text{Konstante}$ :  
diese langdauernde Gleichmässigkeit der Anzahl  $N_2$  von Tochterkernen wird *säkulares*

Gleichgewicht genannt;<sup>(44)</sup>

- für  $\tau_1 \ll t$  nimmt  $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(t)$  exponentiell mit der Zerfallskonstante  $\lambda_1$  ab.

Hier taucht wie im vorigen Fall ein transientes Gleichgewicht auf:  $N_1(t)$  und  $N_2(t)$  sind selbst nicht konstant, deren Verhältnis bleibt aber konstant.

Dieses Verhalten zeigt Abb. III.3.



**Abbildung III.3** – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen  $N_1(t)$  bzw.  $N_2(t)$  im Fall  $\lambda_1 \ll \lambda_2$  (hier  $\lambda_1 = 0.1\lambda_2$ ). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

Als Sonderfall dieser Fallstudien kann man folgendes Problem betrachten: Wie entwickelt sich die Aktivität einer radioaktiven Substanz, wenn sie mit konstanter Produktionsrate erzeugt wird?

Eine solche gleichmäßige Erzeugungsrate kommt beispielsweise vor, falls die Substanz aus Tochterkernen besteht, deren Mutterkerne in konstanter Menge bleiben. Dies entspricht formal dem obigen Fall c, indem man den Limes einer unendlichen mittleren Lebensdauer  $\tau_1 \rightarrow +\infty$  betrachtet, sodass  $N_1(t)$  konstant bleibt, obzwar mit einer endlichen Zerfallsrate  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ , damit neue Tochterkerne erzeugt werden ( $\tau_1$  ist daher nicht mehr der Kehrwert von  $\lambda_1$ ).

Die Anzahl von Tochterkernen genügt dann der differentiellen Gleichung [vgl. Gl. (III.13)]

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) - \lambda_2 N_2(t),$$

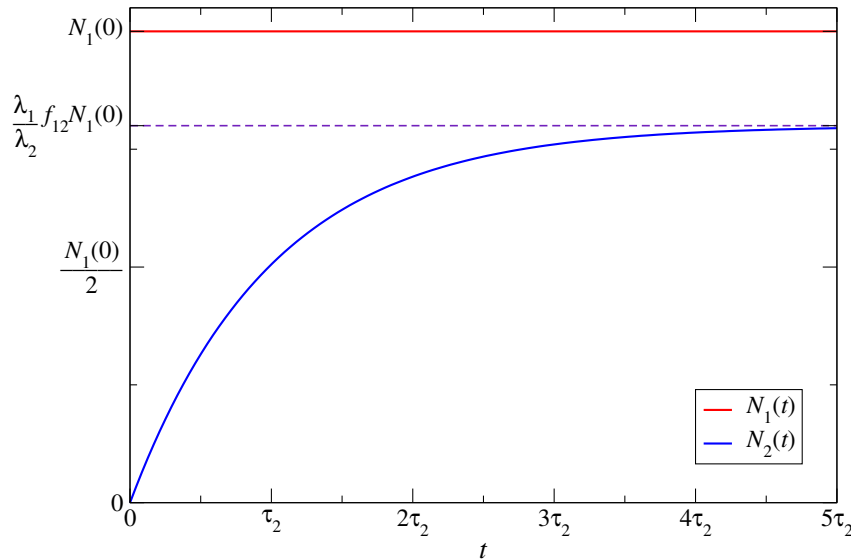
wobei der erste Term auf der rechten Seite entspricht dem Zerfall von  $\lambda_1 N_1(0)$  Mutterkernen pro Sekunde. Die in Abb. III.4 dargestellte Lösung dieser Gleichung unter der Bedingung  $N_2(0) = 0$  lautet

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}).$$

$N_2(t)$  wächst für  $t \ll \tau_2$  linear mit  $t$ , während bei großen Zeiten  $t \gg \tau_2$  die Anzahl von Tochterkernen bei dem konstanten Wert  $\lambda_1 f_{12} / \lambda_2$  sättigt, d.h. es zerfällt in einem gegebenen Zeitintervall so viele Kerne, wie erzeugt werden.

Dann gilt für die Aktivitäten der Mutter- und Tochterkerne  $A_2(t) \underset{t \gg \tau_2}{\simeq} f_{12} A_1(t) = \text{Konstante}$ .

<sup>(44)</sup>Säkular kommt aus dem lateinischen Wort *saeculum* = Jahrhundert.



**Abbildung III.4** – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen  $N_1(t)$  bzw.  $N_2(t)$  im Fall ständig neu produzierter Mutterkerne.

## III.2 Natürlich vorkommende Radioisotope

Einige radioaktiven Nuklide, auch Radioisotope genannt, kommen in der Erde oder in deren Atmosphäre natürlich vor. Dabei sind zwei Herkünfte möglich.

Einerseits können sie vor der Erde entstanden, jedoch seitdem noch nicht völlig zerfallen sein. Dafür soll ihre Halbwertszeit  $T_{1/2}$  der gleichen Ordnung wie das Alter der Erde  $T_{\text{Erde}} \simeq 4,5 \cdot 10^9$  Jahre sein, oder sogar größer. Dies ist der Fall für  $^{40}\text{K}$  — eine der Hauptquellen für Erdwärme, dank seiner Häufigkeit und seinem stetigen Zerfall im Erdzentrum —,  $^{50}\text{V}$ ,  $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{115}\text{In}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{138}\text{La}$ ,  $^{142}\text{Ce}$ ,  $^{144}\text{Nd}$ ,  $^{147}\text{Sm}$ ,  $^{176}\text{Lu}$ ,  $^{187}\text{Re}$ ,  $^{209}\text{Bi}$  — dessen Instabilität nur neulich entdeckt wurde [55] —,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$ . Alle außer  $^{235}\text{U}$  haben  $T_{1/2} > 10^9$  Jahre.

Dabei sind die drei Aktinoiden:

- $^{232}\text{Th}$  mit der Halbwertszeit  $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$  Jahre
- $^{238}\text{U}$  mit  $T_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$  Jahre
- und  $^{235}\text{U}$  mit  $T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$  Jahre

wichtig, denn sie sind Ausgangspunkte für drei natürliche Zerfallsreihen:

Zerfallsreihe	Typ
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$	$4n$
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$	$4n+2$
$^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$	$4n+3$

mit je etwa 10–15 aufeinanderfolgenden Radionukliden, die kontinuierlich erzeugt werden. Beispielsweise tauchen in der  $^{238}\text{U}$ -Reihe das historisch wichtige  $^{226}\text{Ra}$ , das in der Umgebung anwesendes Edelgas  $^{222}\text{Rn}$ , und  $^{210}\text{Po}$  vor.

Eine solche ständige Neuerzeugung ist die Quelle der anderen natürlich vorkommenden Radionuklide. Neben den Tochterkernen eines langlebigen Mutterkerns sind noch  $^3\text{H}$  — auch Tritium genannt, mit der Halbwertszeit  $T_{1/2} = 12,32$  Jahre — und  $^{14}\text{C}$  mit  $T_{1/2} = 5730 \pm 40$  Jahre zu erwähnen. Beide Arten werden in der Erdatmosphäre durch kosmische Strahlung ständig erzeugt, z.B. über die Prozesse  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^3\text{H} + ^{12}\text{C}$  oder  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow p + ^{14}\text{C}$ , und ihre Häufigkeit bleibt ungefähr zeitlich konstant.

**Bemerkung:** Ein weiteres Radionuklid, das ständig neu erzeugt wird, ist  ${}^{237}_{93}\text{Np}$  — und zwar über Neutroneneinfang durch  ${}^{238}\text{U}$  mit Emission von zwei Neutronen:  $n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{237}\text{U} + 2n$ , gefolgt durch den  $\beta^-$ -Zerfall von  ${}^{237}\text{U}$ . Dann führt  ${}^{237}\text{Np}$  (Halbwertszeit  $T_{1/2} = 2,144 \cdot 10^6$  Jahre) über der Zerfallsreihe der Nuklide mit  $4n + 1$  Nukleonen zu  ${}^{205}_{81}\text{Tl}$ .

### Chronometrie

Eine wichtige Anwendung der natürlich vorkommenden Radioisotope ist die Verwendung zur Bestimmung des Alters von Substanzen, in denen sie enthalten sind.

Man betrachte einen Mutterkern M, der in einen stabilen Tochterkern T mit der Zerfallskonstante  $\lambda$  zerfällt. Dabei darf der Mutterkern selbst kein Zerfallsprodukt sein und nur einen Zerfallskanal besitzen. Es wird angenommen, dass es (mindestens) ein anderes Isotop T' des Tochterkerns existiert, das stabil und auch selbst kein Zerfallsprodukt ist. Diese Nuklide werden hiernach „Referenzkerne“ genannt.

- Zur Zeit  $t_0$  entsteht die Substanz, deren Alter zu bestimmen ist. Es seien dann  $M_0 \equiv M(t_0)$  bzw.  $T_0 \equiv T(t_0)$  bzw.  $T'_0 \equiv T'(t_0)$  die Anzahlen von Mutter- bzw. Tochter- bzw. Referenzkernen, die in einer kleinen Probe erhalten sind.

- Die entsprechenden Anzahlen werden zum Zeitpunkt  $t_1$ , d.h. in den meisten Fällen heute, gemessen:  $M_1 \equiv M(t_1)$ ,  $T_1 \equiv T(t_1)$ ,  $T'_1 \equiv T'(t_1)$ .

Nimmt man jetzt an, dass es weder Verlust oder Zuwachs an M, T oder T' zwischen  $t_0$  und  $t_1$  gibt — insbesondere darf T nicht Zerfallsprodukt eines anderen instabilen Mutterkerns sein —, so gelten drei Beziehungen:

Laut dem Zerfallsgesetz (III.7) ist

$$M_1 = M_0 e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad M_0 = M_1 e^{\lambda(t_1-t_0)}. \quad (\text{III.15a})$$

Dazu sind alle zerfallenen M-Kerne in T-Kerne umgewandelt, so dass

$$M_0 + T_0 = M_1 + T_1. \quad (\text{III.15b})$$

Schließlich ist die Anzahl der T'-Kerne erhalten,

$$T'_0 = T'_1. \quad (\text{III.15c})$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt sofort

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{M_1}{T'_1} \left[ e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{T_0}{T'_0}, \quad (\text{III.16})$$

d.h.  $T_1/T'_1$  ist eine affine Funktion von  $M_1/T'_1$ , mit den unbekanntem Koeffizienten  $e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1$  — dem Anstieg der Gerade — und  $T_0/T'_0$  — dem Schnittpunkt mit der vertikalen Achse. Um diese zwei Zahlen zu bestimmen, sind zwei Messungen von  $T_1/T'_1$  und  $M_1/T'_1$  nötig, entsprechend zwei verschiedenen Proben der zu datierenden Substanz. Dabei wird angenommen, dass unterschiedliche Proben unter den gleichen Bedingungen entstehen, sodass das Verhältnis der Isotopenhäufigkeiten  $T_0/T'_0$  unabhängig von  $t_0$  ist. Um den Einfluss der letzteren Annahme zu vermindern, und die unbekanntem Werte zu überbestimmen, werden eigentlich oft mehr als zwei Proben benutzt.

Beispiele der Chronometrie mithilfe natürlicher radioaktiver Kerne sind

- Bestimmung des Alters des Solarsystems — insbesondere der Erde — mithilfe der in Meteoriten gemessenen Verhältnisse der Häufigkeiten von  ${}^{87}\text{Rb}$  (Mutterkern mit Halbwertszeit  $T_{1/2} = 4,8 \cdot 10^{10}$  Jahre),  ${}^{87}\text{Sr}$  (Tochterkern) und  ${}^{86}\text{Sr}$  (Referenzkern<sup>(45)</sup>): somit findet man ein Alter  $t_1 - t_0 = 4,53 \pm 0,02 \cdot 10^9$  Jahre [56].

<sup>(45)</sup>Tatsächlich ist  ${}^{86}\text{Sr}$  das Produkt des  $\beta^-$ -Zerfalls von  ${}^{86}\text{Rb}$ , sodass eine oben gegebene Bedingung genau gesagt nicht erfüllt ist. Da die Halbwertszeit von  ${}^{86}\text{Rb}$  aber nur 18,7 Tage ist, wächst die Häufigkeit von  ${}^{86}\text{Sr}$  nach ein paar Jahren nicht mehr, was im Vergleich mit einer Skala von einigen Milliarden Jahren eine vernachlässigbare Korrektur darstellt.



- Altersbestimmung organischer Verbindungen mit dem  $^{14}\text{C}$ -Verfahren, für welches W. Libby den Nobelpreis für Chemie 1960 erhielt.<sup>(46)</sup>
- Kalium–Argon-Datierung für Gesteine: die Mutterkerne  $^{40}\text{K}$  ( $T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$  Jahre) zerfallen in  $^{40}\text{Ar}$  — in nur 10,9% der Fälle, sonst zerfallen sie in  $^{40}\text{Ca}$  —, und als Referenzkern dient entweder  $^{39}\text{K}$  oder  $^{36}\text{Ar}$ .

## III.3 Arten der Radioaktivität

Kurze Einführung nötig.

### III.3.1 Erhaltungsgrößen in Zerfällen

In Zerfällen, wie in jedem Kern- oder Teilchenphysikalischen Prozess, bleiben einige physikalischen Größen erhalten, was die möglichen Prozesse sowie deren Kinematik beschränkt.

#### III.3.1 a Energie, Impuls, Drehimpuls

Zunächst werden, wie immer in der uns bekannten Physik, drei dynamischen Größen erhalten, und zwar die Gesamtenergie, der Gesamtimpuls, und der Gesamtdrehimpuls der an dem Zerfall teilnehmenden Teilchen. Für jede dieser Größen ist die Summe der Beiträge der Zerfallsprodukte, Tochterkern und Strahlung, gleich dem Wert der Größe für den Mutterkern vor dem Zerfall.

Allgemein beschränken Energie- und Impulserhaltung die Kinematik der Zerfallsprodukte, während die Drehimpulserhaltung für die möglichen Spins der emittierten Teilchen wichtig ist.

#### III.3.1 b Erhaltene Quantenzahlen

Neben den obigen angedeuteten kontinuierlichen Größen treten auch Erhaltungsgrößen auf, die sich durch diskrete additive Quantenzahlen charakterisieren lassen.

#### Elektrische Ladung

Ein erstes Beispiel einer solchen erhaltenen Quantenzahlen stellt die elektrische Ladung  $Q$  dar, die in Einheiten von der Elementarladung  $e$  nur ganzzahlige Werte annehmen kann, positiv oder negativ.

In kernphysikalischen Zerfällen treten nur drei Arten von elektrisch geladenen „elementaren“ Teilchen auf, und zwar die Protonen mit  $Q = +1$  — sodass Atomkerne mit  $Z$  Protonen die Ladung  $Q = +Z$  besitzen —, die Elektronen mit  $Q = -1$  und deren Antiteilchen, die sog. Positronen, mit  $Q = +1$ .

Dagegen sind Neutronen, Neutrinos und  $\gamma$ -Quanten (Photonen) elektrisch ungeladen.

#### Baryonenzahl

Eine andere erhaltene additive Quantenzahl ist die sog. *Baryonenzahl*  $\mathcal{B}$ . Unten den Teilchen, die hiernach von Relevanz sind, tragen nur das Proton und das Neutronen eine Baryonenzahl, und zwar haben sie beide  $\mathcal{B} = +1$ . Dementsprechend gilt für ein Nuklid mit  $A$  Nukleonen  $\mathcal{B} = +A$ .

#### Leptonenzahl

Schließlich spielt noch eine weitere additive Quantenzahl, die *Leptonenzahl*  $\mathcal{L}$ , in kernphysikalischen Zerfällen eine Rolle. Die Nukleonen, Protonen und Neutronen, tragen keine Leptonenzahl, so dass alle Kerne  $\mathcal{L} = 0$  haben.

Dagegen haben die Elektronen und Neutrinos  $\mathcal{L} = +1$ , und ihre Antiteilchen — die Positronen und Antineutrinos —  $\mathcal{L} = -1$ . Somit können solche *Leptonen* nur paarweise auftreten, und zwar mit einem Teilchen und einem Antiteilchen.

<sup>(46)</sup>Libbys ursprünglicher Artikel [57] befasst sich nicht nur mit  $^{14}\text{C}$ , sondern auch mit Tritium. In 1953 verwendete Libby das Letztere, um Wein zu datieren [58].

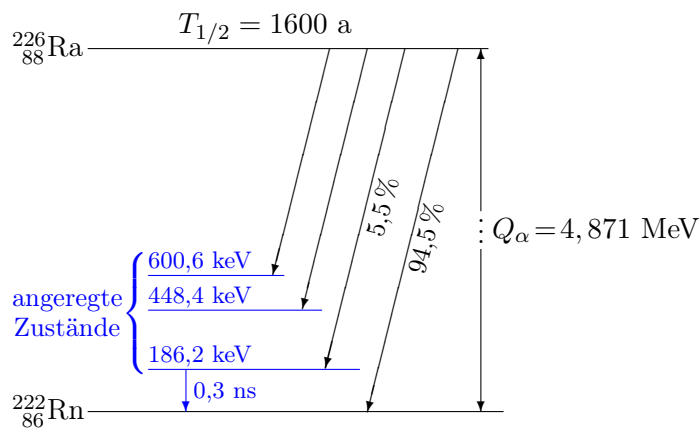
### III.3.2 $\alpha$ -Zerfall

Eine erste mögliche Art von Zerfallsprozess ist jener eines instabilen Atomkerns mit Emission eines  $\alpha$ -Teilchens, d.h. — wie durch Geiger & Rutherford 1908 ermittelt wurde<sup>(47)</sup> — eines  ${}^4_2\text{He}$ -Kerns. Der entsprechende  $\alpha$ -Zerfall lautet



Dabei prüft man einfach, dass die in § III.3.1 b diskutierten Quantenzahlen trivial erhalten sind.

In den meisten Fällen wandelt sich der zerfallende Kern direkt in den Grundzustand des Tochterkerns um. Seltener kann der Zerfall zu einem der angeregten Zustände  ${}^{A-4}_{Z-2}\text{T}^*$  führen. In diesem Fall wird die  $\alpha$ -Emission mit  $\gamma$ -Strahlung kombiniert, wobei die  $\gamma$ -Emission in einer sehr kurzen Zeitspanne nach dem  $\alpha$ -Zerfall erfolgt. Als Beispiel davon wird in Abb. III.5 der  $\alpha$ -Zerfall von  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  zu verschiedenen Zuständen von  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$  dargestellt.



**Abbildung III.5** – Mögliche  $\alpha$ -Zerfälle von  ${}^{226}\text{Ra}$  in die verschiedenen Zustände von  ${}^{222}\text{Rn}$ .

#### Bemerkungen:

\* In der Nuklidkarte entspricht der  $\alpha$ -Zerfall einer Verschiebung um zwei Kästchen entlang der Diagonalen nach unten links.

\* Der zerfallende Mutterkern und der resultierende Tochterkern sind im allgemeinen Fall nicht isoliert, sondern im Zentrum von jeweiligen Atomen mit Elektronenhüllen. Diese Elektronen beeinflussen aber nicht den Zerfallsprozess.

Nach dem  $\alpha$ -Emission hat das „Tochteratom“ am Anfang zwei Elektronen zu viel, die durch das schnelle  $\alpha$ -Teilchen nicht gefangen werden können. Dieses Atom ist aber nicht isoliert, sondern in der Mitte anderer Atome. Einige dieser Nachbaratome werden durch das  $\alpha$ -Teilchen teilweise ionisiert (vgl. Kapitel **Strahlung und Materie**), so dass die zwei übrig gebliebenen Elektronen des Mutteratoms nur teil einer Menge von freien Elektronen sind, die mit den verfügbaren Ionen entlang der Strecke des  $\alpha$ -Teilchens schnell rekombinieren werden. Am Ende seines Flugs fängt das  $\alpha$ -Teilchen selber auch Elektronen ein, so dass es kein freies Elektron übrig bleibt.

#### III.3.2 a Energiebilanz

Energetisch ist der  $\alpha$ -Zerfall möglich, wenn die Masse des Mutterkerns größer als die Summe der Massen der Produkte ist, d.h. wenn der in Gl. (II.4) eingeführte  $Q_\alpha$ -Wert

$$Q_\alpha \equiv [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha]c^2$$

positiv ist. Wie in § II.2.2 b schon erwähnt wurde, gilt dies für  $\beta$ -stabile Kerne sobald  $A \geq 145$ .

<sup>(47)</sup>Vgl. Experimente 4 & 5 in Ref. [7].

Der  $\alpha$ -Zerfall von  ${}^{144}_{60}\text{Nd}$  wurde zwar schon beobachtet, es ist jedoch nicht der Fall für die meisten im  $\beta$ -Stabilitätstal liegenden schwereren Kerne, obwohl ihr Zerfall im Prinzip energetisch möglich ist. In der Praxis findet der Zerfall nur für Werte  $Q_\alpha \gtrsim 2$  MeV statt, eher als schon ab  $Q_\alpha > 0$ , was hiernach erklärt werden wird.

Somit bildet  ${}^{144}_{60}\text{Nd}$  eher eine Ausnahme, die mutmaßlich dadurch erklärt wird, dass der Zerfall zu einem Tochterkern  ${}^{140}_{58}\text{Ce}$  mit magischer Neutronenzahl führt.

Weit von der Stabilitätslinie ist der leichteste bekannte  $\alpha$ -Strahler  ${}^{105}_{52}\text{Te}$  mit  $T_{1/2} = 0,62 \mu\text{s}$  und  $Q_\alpha = 4,89$  MeV.

Dazu führen die Zerfälle einiger sehr leichten Nuklide mit  $A \leq 9$  zu  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne — beispielsweise zerfällt  ${}^8_4\text{Be}$  in zwei  $\alpha$ -Teilchen. Bei diesen leichten Nukliden sollte das  $\alpha$ -Teilchen eher als Tochterkern betrachtet werden, nicht als emittierte „Strahlung“.

### Kinematik

Im Schwerpunktsystem des zerfallenden Kerns lautet die Erhaltung der totalen Energie- bzw. des Impulses (in offensichtlicher Schreibweise)

$$\varepsilon_M = \varepsilon_T + \varepsilon_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \vec{0} = \vec{p}_T + \vec{p}_\alpha.$$

Die Impulserhaltung führt sofort zu  $|\vec{p}_T| = |\vec{p}_\alpha| \equiv p$ , während die Energien durch

$$\varepsilon_M = m_M c^2, \quad \varepsilon_T = \sqrt{m_T^2 c^4 + p^2 c^2} \simeq m_T c^2 + \frac{p^2}{2m_T}, \quad \varepsilon_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 c^4 + p^2 c^2} \simeq m_\alpha c^2 + \frac{p^2}{2m_\alpha}$$

gegeben sind, wobei die eingeführte nicht-relativistische Näherung nur gilt, wenn  $p^2/2m_\alpha \ll m_\alpha c^2$ , was in der Praxis der Fall ist:  $p^2/2m_\alpha$  beträgt ca. 3–8 MeV, während  $m_\alpha c^2 \simeq 3,73$  GeV.

Mithilfe der Energieerhaltung ergibt sich für  $Q_\alpha$

$$Q_\alpha = (m_M - m_T - m_\alpha)c^2 = \frac{p^2}{2m_T} + \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{m_T + m_\alpha}{2m_T m_\alpha} p^2.$$

Für die kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens kommt

$$\varepsilon_{\alpha\text{kin}} = \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{m_T}{m_T + m_\alpha} Q_\alpha \quad (\text{III.18})$$

d.h. sie nimmt einen festen Wert an.

Führt man die Berechnung ganz relativistisch durch, so ergibt sich für die kinetische Energie

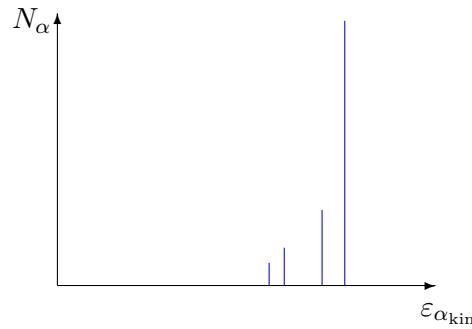
$$\varepsilon_{\alpha\text{kin}} = (m_M^2 - m_T^2 + m_\alpha^2)c^2/2m_M.$$

Jedem möglichen  $\alpha$ -Zerfall eines gegebenen Nuklids, und zwar entweder in den Grundzustand oder in einen angeregten Zustand des Tochterkerns, entspricht ein  $Q_\alpha$ -Wert, der dann die jeweilige kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens festlegt. Folglich haben im Schwerpunktsystem die emittierten  $\alpha$ -Teilchen ein *diskretes Energiespektrum* — eine Linie für jeden möglichen Tochterkernzustand —, was für ein Zweiteilchen-Zerfall charakteristisch ist.

Somit findet man, entsprechend den vier Tochterkernzuständen in Abb. III.5, ein Energiespektrum mit vier „Linien“ — genauer mit vier schmalen Resonanzpeaks — für die im Zerfall von  ${}^{226}\text{Ra}$  emittierten  $\alpha$ -Teilchen, wie in Abb. III.6 schematisch dargestellt wird. Zählt man die Anzahl  $N_\alpha$  von  $\alpha$ -Teilchen in einer Zeitspanne ab, so sind die Höhen der Linien proportional zu den jeweiligen Verzweungsverhältnissen.

### III.3.2b Weitere Erhaltungssätze

Neben den oben diskutierten Energie und Impuls müssen noch Drehimpuls und Parität im Zerfall erhalten sein. Diese Forderung führt zu *Auswahlregeln* für die möglichen Werte des Bahndrehimpulses des  $\alpha$ -Teilchens bezüglich des Tochterkerns.



**Abbildung III.6** – Schematisches Energiespektrum der  $\alpha$ -Teilchen im Zerfall von  $^{226}\text{Ra}$  in die verschiedenen Zustände von  $^{222}\text{Rn}$ .

Es seien  $j_M, P_M$  bzw.  $j_T, P_T$  die Spin- und Paritätquantenzahlen des Mutter- bzw. Tochterkerns. Sei  $\ell$  die Bahndrehimpulsquantenzahl des  $\alpha$ -Teilchens ( $J^P = 0^+$ ). Dann lauten die Erhaltungssätze für Gesamtdrehimpuls und Parität

$$j_M \in \{|j_T - \ell|, \dots, j_T + \ell\} \quad \text{und} \quad (-)^{P_M} = (-)^{P_T} \times (-)^\ell \quad (\text{III.19})$$

woher sich  $\ell$  einschränken lässt.

Zum Beispiel gibt im Fall des Zerfalls  $^{209}\text{Bi} (J^P = \frac{9}{2}^-) \rightarrow ^{205}\text{Tl} (J^P = \frac{1}{2}^+) + \alpha$  die Drehimpulserhaltung  $j_{\text{Bi}} \in \{|j_{\text{Tl}} - \ell|, \dots, j_{\text{Tl}} + \ell\} = \{|\ell - \frac{1}{2}|, \ell + \frac{1}{2}\}$  entweder  $\ell = 4$  oder  $\ell = 5$ . Die Erhaltung der Parität erfordert dann eine ungerade Quantenzahl  $\ell$ , sodass nur  $\ell = 5$  möglich ist.

### III.3.2 c Geiger–Nuttall-Regel

Experimentell beobachteten 1911 Geiger und Nuttall einen ziemlich einfachen Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  und der kinetischen Energie  $\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$  des emittierten  $\alpha$ -Teilchens innerhalb einer Isotopenreihe:

$$\ln T_{1/2} = a + \frac{b}{\sqrt{\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}}}, \quad (\text{III.20})$$

wobei  $a$  und  $b$  zwei Konstanten sind.

Genauer haben sie eine Beziehung zwischen der Halbwertszeit und der Reichweite des  $\alpha$ -Teilchens in Luft [59]. Wiederum hängt diese Reichweite mit der kinetischen Energie  $\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$  zusammen — vgl. Kap. **Strahlung in Materie**.

Diese Abhängigkeit ist über mehr als 20 Zehnerpotenzen gültig, wie in Abb. III.7 im Fall der Uran-Isotope gezeigt wird.

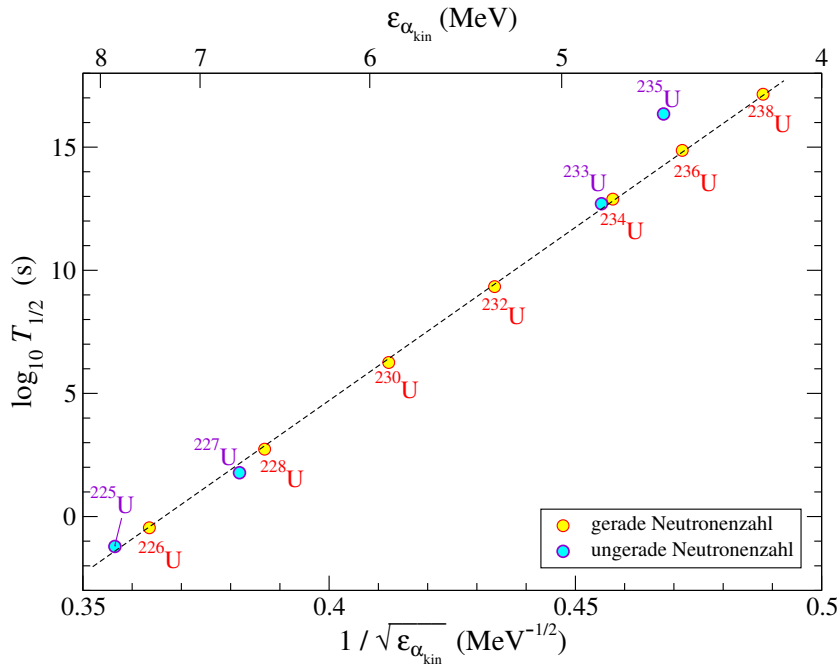
### III.3.2 d Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit

Bei der Emission eines  $\alpha$ -Teilchens durch einen Mutterkern handelt es sich um einen rein quantenmechanischen Effekt — eigentlich erfolgt der Zerfall durch *Tunneleffekt* —, dessen Wahrscheinlichkeit sich bis auf einigen Faktoren relativ einfach berechnen lässt. Daraus kann man dann die Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit des Mutterkerns abschätzen, und dabei die Geiger–Nuttall-Regel wiederfinden.

Historisch wurde diese Berechnung durch Gamow [60] kurz nach der Formulierung der Quantenmechanik durchgeführt: dies zeigte insbesondere, dass die (damals) neue Mechanik nicht nur in der Atomphysik bei Längenskalen von 0,1–10 nm gilt, sondern auch in der Kernphysik bei viel kleineren Skalen.

### Modellierung des Problems

Wir betrachten den Zerfall eines Mutterkerns mit Ladungszahl  $Z$  in einen Tochterkern — Masse  $M_T$ , Ladungszahl  $Z - 2$  — und ein  $\alpha$ -Teilchen. Sei  $\varepsilon_\alpha$  die totale Energie des  $\alpha$ -Teilchens, abgesehen von dessen Massenenergie.



**Abbildung III.7** – Geiger–Nuttall’sche Beziehung zwischen  $T_{1/2}$  und  $\epsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$  für die Uran-Isotope. Daten aus <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>.

- Im Anfangszustand bilden 2 Protonen und 2 Neutronen des Mutterkerns ein  $\alpha$ -Teilchen.

Dabei hilft die besonders hohe Bindungsenergie pro Nukleon des  $^4_2\text{He}$ -Kerns (s. Nebenbild in Abb. I.10), entsprechend einer starker Zusammenbindung der zwei Protonen und zwei Neutronen. Dafür müssen sich die vier Nukleonen zusammen in einem kleinem Bereich in Orts- (Größe der Ordnung des  $^4_2\text{He}$ -Kernradius) und Impulsraum befinden: zur genauen Beschreibung dieses Stadiums ist daher ein detailliertes Modell des Kerns nötig, das solche 4-Teilchen-Effekte berücksichtigt!

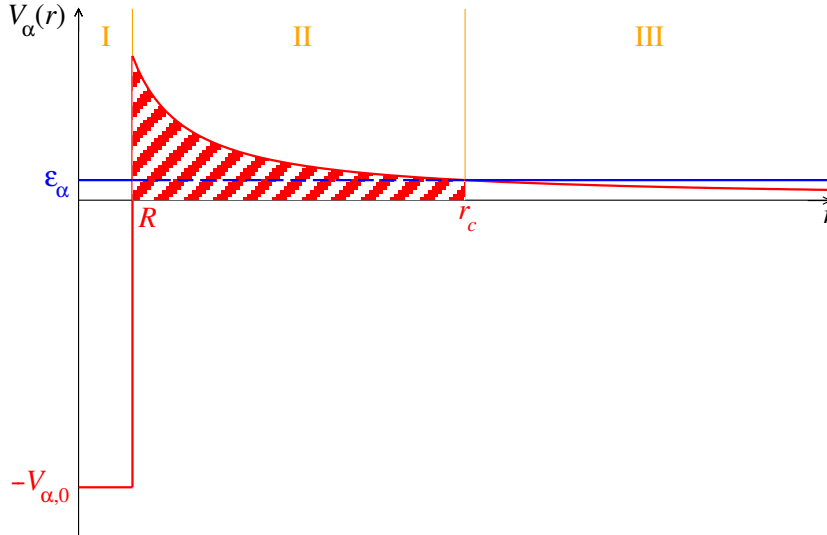
Dieses  $\alpha$ -Teilchen ist in einem Potentialtopf  $V_\alpha(\vec{r})$  eingeschlossen, der durch den Rest des Mutterkerns verursacht wird. Wie im Fall der in Abschn. II.4 eingeführten Potentialtöpfe handelt es sich dabei um ein mittleres effektives Potential, das die Wirkung aller  $A-4$  anderen Nukleonen des Kerns auf das  $\alpha$ -Teilchen beschreiben soll.<sup>(48)</sup> Der Einfachheit halber wird hiernach ein kugelsymmetrisches Kastenpotential mit der Tiefe  $-V_0^{(\alpha)}$  angenommen.

- Nach dem Zerfall befindet sich das  $\alpha$ -Teilchen außerhalb des Mutterkerns: es spürt das durch den Tochterkern erzeugte abstoßende Coulomb-Potential und wird deshalb beschleunigt, bis es die durch Gl. (III.18) gegebene “endgültige” kinetische Energie  $\epsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$  hat, die gleich dessen totalen Energie  $\epsilon_\alpha$  ist.

Genauer wird das  $\alpha$ -Teilchen beschleunigt, so lange das Kernpotential spürbar ist, d.h. so lange dieses Potential noch nicht durch die Elektronen des „Mutter“-Atoms abgeschirmt ist. Wenn das  $\alpha$ -Teilchen außerhalb der Elektronenhülle ist, wird es nicht mehr beschleunigt. Stattdessen wird es eher abgebremst, denn es fängt an, andere Atome zu treffen, vgl. Kap. **Strahlung in Materie**. Daher bezeichnet die „kinetische Energie im Endzustand“  $\epsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$  die Energie am Ende der Beschleunigungsphase, vor dem Anfang des Energieverlusts über Stöße mit anderen Atomen.

Unter der Annahme, dass die Reichweite  $R$  des Kastenpotentialtopfs  $V_\alpha$ , entsprechend etwa dem Kernradius, sich im Zerfall nicht ändert, lautet das durch das  $\alpha$ -Teilchen gespürte Potential

<sup>(48)</sup>Dieses Potential  $V_\alpha$  unterscheidet sich vom Potential  $V_p$  bzw.  $V_n$ , das ein Proton bzw. Neutron spürt.



**Abbildung III.8** – Vereinfachter Verlauf des effektiven Potentials für die Modellierung des  $\alpha$ -Zerfalls.

$$V_{\alpha}(r) = \begin{cases} -V_{\alpha,0} & \text{für } r < R, \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R. \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Ein solches Potential wird in Abb. III.8 dargestellt. Die Größenordnung des maximalen Werts der potentiellen Energie bei  $r = R$  lässt sich einfach abschätzen: mit  $Z \simeq 60$  und  $R \simeq 5$  fm kommt  $V_{\alpha}(R) \approx 35$  MeV, erheblich größer als die totale Energie  $\epsilon_{\alpha} \approx 3\text{--}8$  MeV. Daher treten drei Gebiete auf:

- für  $r < R$  (Gebiet I) oder  $r \geq r_c$  (Gebiet III) mit  $r_c$  dem klassischen Umkehrpunkt, definiert durch

$$V_{\alpha}(r_c) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c} = \epsilon_{\alpha\text{kin}} \quad \text{d.h.} \quad r_c = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{\alpha\text{kin}}}, \quad (\text{III.22})$$

ist die potentielle Energie kleiner als  $\epsilon_{\alpha}$ : daher besitzt das  $\alpha$ -Teilchen dort eine positive kinetische Energie, d.h. klassisch darf es in diesen Bereichen lokalisiert werden.

- für  $R \leq r < r_c$  (Gebiet II) ist die potentielle Energie des  $\alpha$ -Teilchens größer als dessen totale Energie, d.h. das Teilchen hat in diesem Bereich keine wohldefinierte kinetische Energie und darf sich daher klassisch dort nicht befinden.

Klassisch ist das Kommen des  $\alpha$ -Teilchens aus dem Kern, vom Gebiet I zum Gebiet III, ohne Anregung unmöglich. Somit beruht der Zerfall auf dem quantenmechanischen *Tunneleffekt*, und die Zerfallswahrscheinlichkeit entspricht der Tunnelwahrscheinlichkeit. Die Letztere ergibt sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein  $\alpha$ -Teilchen im Potentialtopf (III.21)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} \Delta \psi_{\alpha}(\vec{r}) + V_{\alpha}(\vec{r}) \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \epsilon_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}). \quad (\text{III.23a})$$

Entsprechend der sphärischen Symmetrie des angenommenen effektiven Potentials (III.21) kann man für die Wellenfunktion den üblichen Separationsansatz  $\psi_{\alpha}(\vec{r}) = R_{\alpha}(r) Y_{\ell m_{\ell}}(\theta, \varphi)$  machen, wobei der radiale Anteil  $R_{\alpha}(r)$  im Prinzip auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl abhängt, obwohl dies hier nicht explizit geschrieben wird. Mit diesem Ansatz führt Gl. (III.23a) zur Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} \left[ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\alpha}(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{\alpha}(r) \right] + V_{\alpha}(r) R_{\alpha}(r) = \epsilon_{\alpha} R_{\alpha}(r). \quad (\text{III.23b})$$

### Tunnelwahrscheinlichkeit, Gamow-Faktor

Betrachte man zunächst den Fall  $\ell = 0$ , so dass der zweite Term in den eckigen Klammern in Gl. (III.23b) verschwindet. Trotz dieser Vereinfachung bleibt die Differentialgleichung wegen der komplizierten Form des Potentials  $V_\alpha$  nicht exakt lösbar.

Anhand eines Näherungsverfahrens kann man doch eine annähernde Lösung finden.<sup>(49)</sup> Damit lässt sich die Tunnelwahrscheinlichkeit bestimmen, die durch das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei  $r = r_c$  — d.h. am Rand des klassisch erlaubten Bereichs außerhalb des Kerns — und bei  $r = R$  — entsprechend dem Rand des effektiven Potentials — gegeben ist:

$$\mathcal{P} \simeq \frac{4\pi r_c^2 |R_\alpha(r=r_c)|^2}{4\pi R^2 |R_\alpha(r=R)|^2}, \quad (\text{III.24})$$

wobei die Faktoren  $4\pi r_c^2$  und  $4\pi R^2$  die Flächen der Kugel  $r = r_c$ ,  $r = R$  sind. Dabei findet man, bis auf einem hier unwesentlichen Vorfaktor der Ordnung Eins<sup>(49)</sup>

$$\mathcal{P} \simeq \exp \left[ -2 \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V_\alpha(r') - \varepsilon_\alpha]} dr' \right] \equiv e^{-G}, \quad (\text{III.25})$$

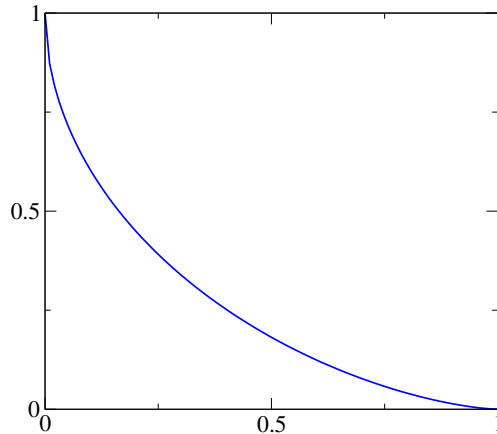
mit  $G$  dem sogenannten *Gamow-Faktor*. Unter Verwendung von  $V_\alpha(r') = V_\alpha(r_c) r_c/r' = \varepsilon_\alpha r_c/r'$ , wobei die zweite Identität aus Gl. (III.22) kommt, ergibt sich

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m_\alpha \varepsilon_\alpha}{\hbar^2}} \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{r_c}{r'} - 1} dr' = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2 \varepsilon_\alpha}} \pi \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right), \quad (\text{III.26a})$$

mit

$$\mathcal{G}(x) \equiv \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right] \quad (\text{III.26b})$$

einer Funktion, die für  $0 \leq x \leq 1$  Werte zwischen 0 und 1 annimmt, wie in Abb. III.9 gezeigt wird.



**Abbildung III.9** – Verlauf der durch Gl. (III.26b) definierten Funktion  $\mathcal{G}(x)$ .

Energetisch ist der Zerfall für  $Q_\alpha > 0$  möglich, insbesondere im Grenzfall  $Q_\alpha \rightarrow 0^+$ . Im letzteren Limes, der auch  $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0^+$  entspricht, geht der klassische Umkehrpunkt  $r_c$  nach  $+\infty$ , d.h.  $R/r_c \rightarrow 0$  und dementsprechend  $\mathcal{G}(R/r_c) \rightarrow 1$ . Daher ist der Gamow-Faktor durch den Faktor  $1/\varepsilon_\alpha$  kontrolliert, und zwar  $G \rightarrow +\infty$ , so dass die Tunnelwahrscheinlichkeit gegen Null geht. Dies erklärt, warum Zerfälle nur für  $Q_\alpha$ -Faktoren mit einem minimalen Wert von etwa 2 MeV beobachtet werden.

<sup>(49)</sup>Die Berechnung wird im Anhang III.A zu diesem Kapitel mehr detailliert.

**Bemerkungen:**

\* Hier wurde die Tunnelwahrscheinlichkeit als das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten definiert, Gl. (III.24). Manchmal wird eher das Verhältnis der Teilchenflussdichten verwendet. Da die Teilchenflussdichte grob gesagt gleich dem Produkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit der Geschwindigkeit ist, unterscheidet sich diese alternative Definition von der hier benutzten nur um einen unwichtigen Vorfaktor zum Exponentialterm.

\* Als Gamow-Faktor wird manchmal nicht  $G$ , definiert durch Gl. (III.26a), bezeichnet, sondern  $e^{-G}$  oder  $G/2$ .

\* Der Gamow-Faktor (III.26a) lässt sich noch schreiben als

$$G = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{\epsilon_\alpha}} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right).$$

Dabei erkennt man einerseits die elektromagnetische Feinstrukturkonstante  $\alpha_{\text{em}} \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ , andererseits das Verhältnis von der Massenenergie des  $\alpha$ -Teilchens zu dessen kinetischen Energie. Somit kann man die Größenordnung des Gamow-Faktors schnell abschätzen.

**Zerfallsrate, Halbwertszeit**

Die Tunnelwahrscheinlichkeit  $\mathcal{P} \simeq e^{-G}$  gibt die Wahrscheinlichkeit für den „Sprung“ von  $r = R$  nach  $r = r_c$ . Um die Zerfallsrate  $\lambda_\alpha$ , d.h. die Anzahl dieser Sprünge pro Zeiteinheit, zu erhalten, muss man noch  $\mathcal{P}$  durch die Rate, mit der Teilchen sich bei  $r = R$  befinden, multiplizieren. Eine grobe Abschätzung für diese Rate ist  $v_{\text{in}}/2R$ , mit  $v_{\text{in}}$  der Geschwindigkeit des  $\alpha$ -Teilchens im Potentialtopf, entsprechend dem Kehrwert der Zeitdauer zur Durchquerung des Topfs:

$$\lambda_\alpha \simeq \frac{v_{\text{in}}}{2R} e^{-G}.$$

Für den Halbwertszeit des Mutterkerns ergibt sich somit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_\alpha} \simeq \frac{\ln 2}{v_{\text{in}}/2R} e^G,$$

d.h.  $\ln T_{1/2} \simeq \ln(2R \ln 2 / v_{\text{in}}) + G$ . Unter Betrachtung der  $1/\epsilon_\alpha$ -Abhängigkeit des Gamow-Faktors findet man das Geiger–Nuttall-Gesetz (III.20)

$$\ln T_{1/2} = -a + \frac{b}{\sqrt{\epsilon_\alpha}}$$

wieder. Das Letztere ist somit ein starker Hinweis auf die Gültigkeit der Modellierung des  $\alpha$ -Zerfalls als Tunnelprozess.

**Fall  $\ell \neq 0$** 

Wie früher schon diskutiert wurde, kann die Erhaltung des Drehimpulses im Zerfall dazu führen, dass das  $\alpha$ -Teilchen mit einem nicht-verschwindenden Drehimpuls bezüglich des Tochterkerns emittiert wird, d.h. mit einer Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell \neq 0$ .

In diesem Fall lässt sich der radiale Anteil (III.23b) der Schrödinger-Gleichung für das  $\alpha$ -Teilchen noch als

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\alpha,\ell}(r)) + V_{\alpha,\text{eff}}(r) R_{\alpha,\ell}(r) = \epsilon_\alpha R_{\alpha,\ell}(r), \quad (\text{III.27a})$$

umschreiben, wobei

$$V_{\alpha,\text{eff}}(r) \equiv V_\alpha(r) + \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (\text{III.27b})$$

Dabei wird der Effekt des Bahndrehimpulses als eine Änderung des durch das  $\alpha$ -Teilchen gespürten Potentials berücksichtigt. Somit sieht das Teilchen eine höhere Potentialbarriere, als wenn es



keinen bzw. einen kleineren Bahndrehimpuls hätte. Wiederum führt diese erhöhte (und breitere) Potentialbarriere zu einer kleineren Tunnelwahrscheinlichkeit bzw. einer längeren Halbwertszeit des Mutterkerns.

### III.3.3 $\beta$ -Zerfall und verwandte Zerfälle

Dieser Abschnitt befasst sich mit einer zweiten häufig auftretenden Art von Zerfallsprozessen, in denen sich ein Neutron in ein Proton umwandelt oder umgekehrt, während die Massenzahl  $A$  konstant bleibt. Somit unterliegen diese Prozesse die in § II.2.2 a im Hinblick auf die Energie diskutierten Kernumwandlungen, die zur Minimierung der Masse des Kerns innerhalb einer Isobarenreihe führen.

Solche Zerfälle werden durch die *schwache Wechselwirkung* verursacht, und gehen somit mit der Nicht-Erhaltung der Parität, die sonst in starken oder elektromagnetischen Prozessen — z.B. in  $\alpha$ - oder  $\gamma$ -Zerfällen — erhalten ist.

#### III.3.3 a $\beta^-$ -Zerfall

Eine erste Möglichkeit, bei neutronenreichen Kernen, ist die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton mit Emission eines Elektrons  $e^-$  und eines Elektron-Antineutrinos  $\bar{\nu}_e$ , wobei das Letztere selten detektiert wird. Dieser Prozess lässt sich somit als



symbolisieren. Die Erhaltung der in § III.3.1 b aufgelisteten Quantenzahlen ist trivial erfüllt.

Energetisch ist der Zerfall möglich, wenn die Masse des Mutterkerns größer als die Summe der Masse der Zerfallsprodukte ist, d.h. wenn<sup>(50)</sup>

$$Q_{\beta^-} \equiv [m(Z, A) - m(Z + 1, A) - m_e] c^2 > 0. \quad (\text{III.29})$$

Der  $Q_{\beta^-}$ -Faktor lässt sich noch durch die Bindungsenergien (I.23) ausdrücken

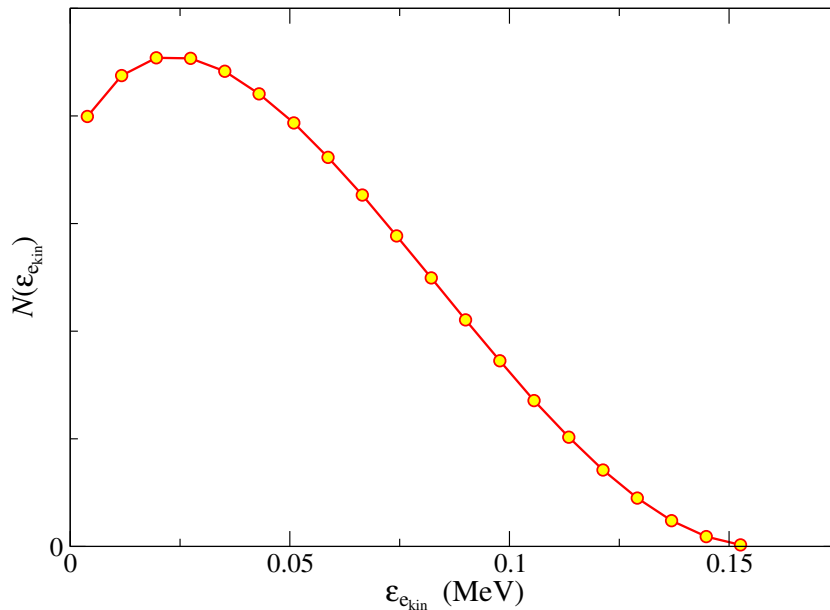
$$Q_{\beta^-} = B(Z + 1, A) - B(Z, A) + (m_n - m_p - m_e) c^2 = B(Z + 1, A) - B(Z, A) + 0,782 \text{ MeV}. \quad (\text{III.30})$$

Im Gegensatz zum  $\alpha$ -Zerfall finden  $\beta^-$ -Zerfälle schon für geringe Werte des  $Q_{\beta^-}$ -Faktors statt: z.B. hat  ${}^{107}_{46}\text{Pd}$ , mit  $Q_{\beta^-} = 34 \text{ keV}$ , eine Halbwertszeit von  $6,5 \cdot 10^6$  Jahren. Dies deutet darauf hin, dass es im  $\beta^-$ -Zerfall keine Potentialbarriere zu durchtunneln gibt.

Ein anderer Unterschied mit dem  $\alpha$ -Zerfall liegt daran, dass es sich bei dem  $\beta^-$ -Zerfall um einen Dreiteilchen-Zerfall handelt, d.h. es gibt drei Produkte im Endzustand. Dementsprechend sind die Energien Impulsbeträge der Zerfallsprodukte, insbesondere die kinetische Energie  $\varepsilon_{e_{\text{kin}}}$  des Elektrons, nicht eindeutig durch die Massen der beteiligten Partners bestimmt, im Gegensatz zu Zweiteilchen-Zerfälle. Somit kann  $\varepsilon_{e_{\text{kin}}}$  jeden beliebigen Wert zwischen 0 und  $Q_{\beta^-}$  annehmen, d.h. das Energiespektrum der emittierten Elektronen ist kontinuierlich. Als Beispiel davon zeigt Abb. III.10 das Spektrum der im  $\beta^-$ -Zerfall von  ${}^{14}\text{C}$  emittierten Elektronen.

Das Spektrum folgt aus drei Faktoren. Erstens gibt es einen „Phasenraumfaktor“, der die Anzahl von kinematisch verfügbaren Endzuständen im Impulsraum darstellt. Dieser Faktor ist Null bei  $|\vec{p}_e| = 0$ , d.h.  $\varepsilon_{e_{\text{kin}}} = 0$ , da er proportional zu  $d^3\vec{p}_e \propto |\vec{p}_e|^2 d|\vec{p}_e|$  ist. Zweitens kann das quantenmechanische Matrixelement für den Übergang vom Anfangs- zum Endzustand möglicherweise vom Impuls des Elektrons abhängen, insbesondere indem Übergänge unterdrückt oder sogar verboten sind. Drittens berücksichtigt ein sog. *Fermi-Faktor* den Einfluss des Coulomb-Felds des Atomkerns auf das emittierte Teilchen. Im Fall des  $\beta^-$ -Zerfalls wird das Elektron durch den Kern angezogen, und daher abgebremst, was zu einer Verschiebung des Spektrums nach kleineren Werten der Energie führt; insbesondere verschwindet das Spektrum nicht mehr im Grenzwert  $\varepsilon_{e_{\text{kin}}} \rightarrow 0$ . Dagegen werden die in  $\beta^+$ -Zerfällen emittierten Positronen, vgl. unten,

<sup>(50)</sup>Die Masse des Antineutrinos  $m_{\nu} < 2 \text{ eV}$  [28] ist dabei vernachlässigbar.



**Abbildung III.10** – Energiespektrum der Elektronen im  $\beta^-$ -Zerfall von  $^{14}\text{C}$  mit  $Q_{\beta^-} = 0.156$  MeV. Daten aus <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2>.

durch das positiv geladene Kern abgestoßen und somit beschleunigt, so dass das zugehörige Spektrum für  $\epsilon_{\text{kin}} \rightarrow 0$  verschwindet, wie in Abb. III.11 zu sehen ist.

Historisch hat die Beobachtung des kontinuierlichen Spektrums zur Paulis Postulierung der Existenz des (Anti-)Neutrinos geführt, „um den Energiesatz zu retten“, obwohl nur der Tochterkern und das Elektron gemessen wurden.<sup>(51)</sup> Darüber hinaus ist das neue, bis 1956 nicht direkt beobachtete Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen auch für die Erhaltung des gesamten Drehimpulses nötig.

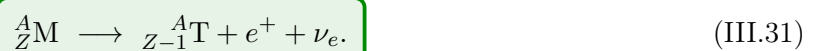
In Gegensatz zu Energie, Impuls, Drehimpuls und den additiven Quantenzahlen des § III.3.1 b ist die Parität in  $\beta$ -Zerfällen *nicht* erhalten. Dies wird weiter in § III.3.3 e diskutiert.

#### Bemerkungen:

- \* In der Nuklidkarte lässt sich der  $\beta^-$ -Zerfall durch eine Verschiebung um ein Kästchen nach oben links darstellen.
- \* Ein wichtiges Beispiel von  $\beta^-$ -Zerfall ist jener des freien Neutrons, vgl. auch § I.5.3.
- \* Wie beim  $\alpha$ -Zerfall spielt die Elektronenhülle des Atoms keine Rolle im  $\beta^-$ -Zerfall, sowie im hiernach diskutierten  $\beta^+$ -Zerfall.

#### III.3.3 b $\beta^+$ -Zerfall

In protonenreichen Atomkernen ist es energetisch günstig, ein Proton in ein Neutron umzuwandeln, entsprechend in der Nuklidkarte einer Verschiebung um ein Kästchen nach unten rechts. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits kann die Umwandlung „induziert“ werden, indem das Proton mit einem Elektron interagiert: solche Prozesse werden im folgenden Paragraph behandelt. Andererseits kann das Proton sich „spontan“ in ein Neutron transformieren. Dabei werden auch ein Positron  $e^+$  — d.h. das Antiteilchen zum Elektron — und ein Elektron-Neutrino  $\nu_e$  emittiert mit dem Neutron, entsprechend dem Kernprozess



<sup>(51)</sup>Vgl. Paulis berühmten Brief vom 4. Dezember 1930, online verfügbar unten [https://cds.cern.ch/record/83282/files/meitner\\_0393.pdf](https://cds.cern.ch/record/83282/files/meitner_0393.pdf) (letzter Zugriff: 03.02.2015). Dabei nennt er das neue Teilchen „Neutron“ — der heute als Neutron bezeichnete Bestandteil des Kerns wurde damals noch nicht entdeckt.

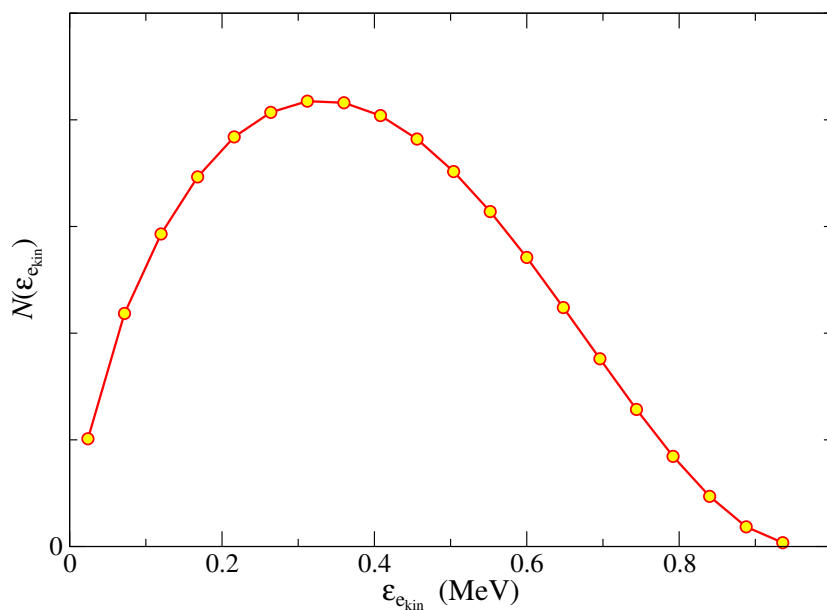
Da das freie Proton nicht in ein Neutron zerfallen kann — die Protonenmasse ist kleiner als die Neutronenmasse —, ist der Prozess nicht wirklich spontan, sondern hängt er von der Umgebung des zerfallenden Protons ab, d.h. vom Rest des Atomkerns. Der Zerfall ist aber unabhängig von der Umgebung des Kerns, weshalb er hier als „spontan“ bezeichnet wurde.

Der  $\beta^+$ -Zerfall ist energetisch möglich wenn

$$Q_{\beta^+} \equiv [m(Z, A) - m(Z - 1, A) - m_e]c^2 > 0. \quad (\text{III.32})$$

Beispielsweise ist im Fall  $Z = A = 1$  der  $Q$ -Wert  $Q_{\beta^+} = (m_p - m_n - m_e)c^2 = -1,804 \text{ MeV}$  negativ, entsprechend der Stabilität des freien Proton gegen  $\beta^+$ -Zerfall.

Wie beim  $\beta^-$ -Zerfall sind die Spektren der Zerfallsprodukte, insbesondere des Positrons, kontinuierlich. Als Beispiel wird das Spektrum der Positronen aus dem Zerfall von  $^{11}\text{C}$  in Abb. III.11 dargestellt.



**Abbildung III.11** – Energiespektrum der Positronen im  $\beta^+$ -Zerfall von  $^{11}\text{C}$  mit  $Q_{\beta^+} = 0,960 \text{ MeV}$ . Daten aus <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2>.

Wie beim  $\beta^-$ -Zerfall wird die Parität in  $\beta^+$ -Zerfällen verletzt.

**Bemerkung:** Das Positron wird zwar aus dem Mutteratom emittiert, es wird aber schnell mit einem Elektron eines Nachbaratoms reagieren: zusammen erzeugen sie zunächst einen gebundenen Zustand, das sogenannte *Positronium* (Symbol: Ps). Nach kurzer Zeit zerstrahlt das Letztere meistens in zwei Photonen mit je der Energie  $0,511 \text{ MeV}$ , seltener in drei Photonen.

Das Positronium kann tatsächlich entweder als Parapositronium (Spin 0) oder als Orthopositronium (Spin 1) vorkommen. Wegen der Paritätserhaltung — dabei handelt es sich um einen elektromagnetischen Prozess — zerfällt der Spin-0-Zustand in eine gerade Zahl, meistens 2, von Photonen (innere Parität  $-1$ ), während die Annihilation des Orthopositroniums zu einer ungeraden Zahl von Photonen, und zwar mindestens 3, damit Energie und Impuls auch erhalten werden.

### III.3.3c Elektroneneinfang

Bei der „induzierten“ Umwandlung des Protons eines Atomkerns in ein Neutron handelt es sich um einen Prozess, in dem der Mutterkern ein Elektron einfängt, während im Endzustand ein Elektron-Neutrino emittiert wird:



Dabei kann das eingefangene Elektron entweder ein freies Elektron sein, oder in den meisten Fällen aus der Elektronenhülle des Mutteratoms stammen, und zwar zumeist aus der niedrigst liegenden K-Schale, seltener aus den L- oder M-Schalen.

Energetisch ist der Prozess möglich wenn<sup>(52)</sup>

$$Q_{\text{EC}} \equiv [m(Z, A) + m_e - m(Z - 1, A)]c^2 > 0. \quad (\text{III.34})$$

Somit kann der Tochterkern außergewöhnlich schwerer als der Mutterkern sein — die fehlende Energie kommt aus der Energie des Elektrons: Bindungsenergie, falls es aus dem Atomhülle eingefangen wird, oder kinetische Energie, wenn das eingefangene Elektron frei war. Zum Beispiel kann der Elektroneneinfang des  ${}^7_4\text{Be}$ -Kerns zu zwei Isotopen von  ${}^7_3\text{Li}$ , und zwar entweder zu einem angeregten Zustand, der schwerer als  ${}^7_4\text{Be}$  ist, oder zum Grundzustand (Abb. III.12)

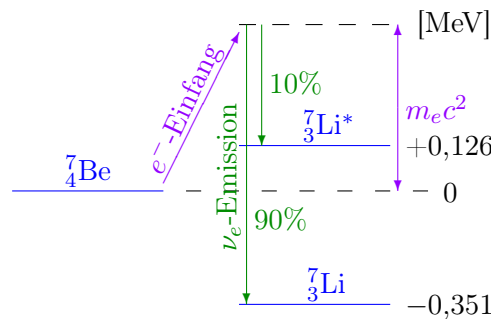


Abbildung III.12 – Darstellung der Energieniveaus im Elektroneneinfang von  ${}^7\text{Be}$ .

#### Bemerkungen:

\* Nach dem Einfang eines Elektrons aus der Hülle bleibt in der Letzteren ein Loch, so dass das Atom sich oft in einem angeregten Zustand befindet. Die Anregungsenergie kann entweder als elektromagnetische Strahlung abgegeben werden oder auf ein anderes Hüllenelektron übertragen werden, das dann aus dem Atom emittiert wird: dies bildet den *Auger-Effekt*. Das resultierende Energiespektrum der emittierten *Auger-Elektronen*, auch *Konversionselektronen* genannt, ist diskret, denn sie besitzen die kinetische Energie  $E_{e_{\text{kin}}} = B_{e,2} - B_{e,1}$ , wobei  $B_{e,1}$  bzw.  $B_{e,2}$  die Bindungsenergien der Elektronenniveaus sind.

\* Wegen der Coulomb-Abstoßung zwischen Kern und dem positiv geladenen Positron ist der Einfang des Letzteren — was zur Umwandlung eines Neutrons in ein Proton führen könnte — höchst unwahrscheinlich.

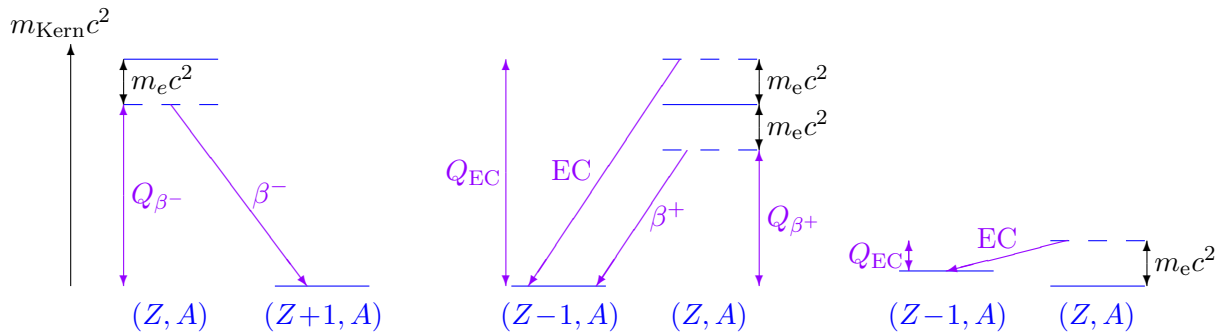
#### III.3.3 d Übersicht über $\beta$ -Zerfälle

In Abb. III.13 werden die möglichen Anordnungen der Massen von Mutter- und Tochternuklid für die drei Arten von  $\beta$ -Zerfälle dargestellt. Dabei erkennt man nochmals, dass bei Elektroneneinfängen der Tochterkern eine höhere Masse als der Mutterkern haben kann.

Anstatt mit den Kernmassen  $m(Z, A)$  und  $m(Z \pm 1, A)$  können die  $Q$ -Werte (III.29), (III.32), (III.34) noch durch die Atommassen  $m'(Z, A)$ ,  $m'(Z \pm 1, A)$  ausgedrückt werden,<sup>(53)</sup> was manchmal zu kürzeren — eigentlich aber nur approximativen — Beziehungen führt.

<sup>(52)</sup>Hier bedeutet das Kürzel EC *electron capture*.

<sup>(53)</sup>Zur Erinnerung gilt  $m'(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - B_e(Z, A)$ , wobei  $B_e(Z, A)$  die Bindungsenergie der Elektronen bezeichnet.



**Abbildung III.13** – Schema der möglichen Anordnungen der Kernmassen in  $\beta$ -Zerfällen.

Somit lautet der  $Q$ -Faktor für  $\beta^-$ -Zerfall

$$Q_{\beta^-} = [m'(Z, A) + B_e(Z, A) - m'(Z + 1, A) - B_e(Z + 1, A)]c^2 \simeq [m'(Z, A) - m'(Z + 1, A)]c^2, \tag{III.35}$$

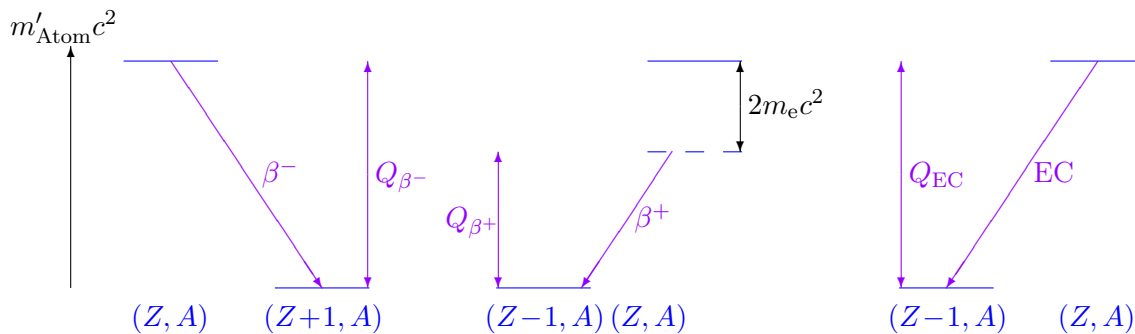
wobei in der zweiten Zeile die kleine Differenz zwischen den Bindungsenergien der Elektronenhüllen (ca. 10 eV, im Vergleich zur typischen kernphysikalischen Energie von etwa 1 MeV) vernachlässigt wird. Ähnlicher gilt für den  $\beta^+$ -Zerfall

$$Q_{\beta^+} \simeq [m'(Z, A) - m'(Z - 1, A) - 2m_e]c^2. \tag{III.36}$$

und für den Elektroneneinfang

$$Q_{EC} \simeq [m'(Z, A) - m'(Z - 1, A)]c^2. \tag{III.37}$$

Die möglichen Anordnungen der Massen von Mutter- und Tochteratome für die drei Arten von  $\beta$ -Zerfälle werden in Abb. III.14 gezeigt.



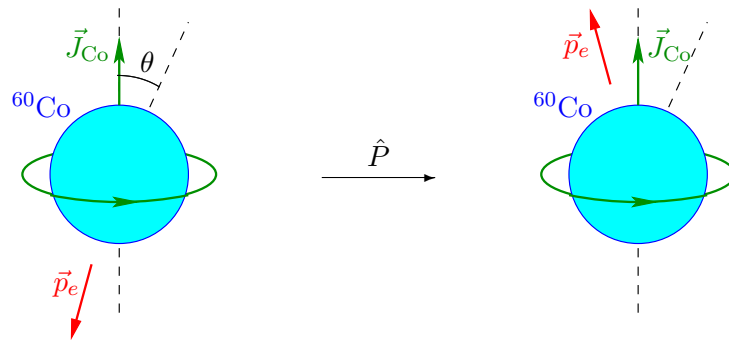
**Abbildung III.14** – Schema der möglichen Anordnungen der Atommassen in  $\beta$ -Zerfällen.

### III.3.3e Verletzung der Parität beim $\beta$ -Zerfall

Während Energie, Impuls und Drehimpuls in  $\beta$ -Zerfällen erhalten sind, ist die Parität dagegen *nicht* erhalten, im Gegenteil zum  $\alpha$ -Zerfall.

Kurz nach einem theoretischen Vorschlag von T.D.Lee & C.N.Yang, dass die Erhaltung der Parität in schwachen Prozessen systematisch experimentell geprüft werden sollte, hat Frau C.S.Wu den  $\beta^-$ -Zerfall polarisierter  $^{60}\text{Co}$ -Kerne untersucht [61].<sup>(54)</sup> Dabei wurde ermittelt, dass die Elektronen bevorzugt entgegen der Richtung des Kernspins  $\vec{J}_{\text{Co}}$ , d.h. mit einem Polarwinkel  $\theta > 90^\circ$ , emittiert werden, wie in Abb. III.15 links dargestellt wird. Wenn  $\vec{p}_e$  den Impuls des Elektrons im Ruhesystem des  $^{60}\text{Co}$ -Kerns bezeichnet, dann nimmt der Erwartungswert des Skalarprodukts  $\vec{p}_e \cdot \vec{J}_{\text{Co}}$  über viele Zerfälle einen negativen Wert an.

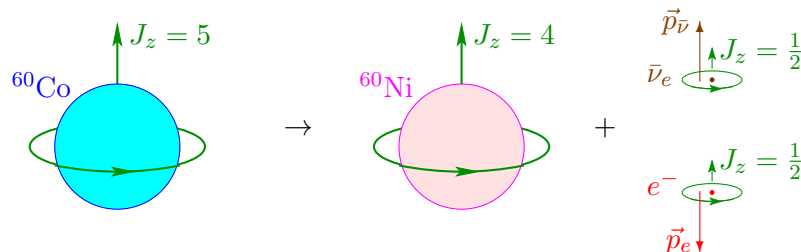
<sup>(54)</sup>Weitere experimentelle Details können in [8], Experiment 45, gefunden werden.



**Abbildung III.15** – Emissionsrichtung des Elektrons im Wu-Experiment (links) und im raumgespiegelten Prozess (rechts).

Betrachtet man den raumgespiegelten Prozess (Abb. III.15 rechts), so werden die Richtungen der Impulse der emittierten Elektronen invertiert — Impulse sind Vektoren —, während die Richtung des Kernspins ungeändert bleibt — der Spin ist ein axialer Vektor. Somit wären die Elektronen in diesem raumgespiegelten Experiment vorzugsweise parallel zum Kernspin (Polarwinkel  $\theta < 90^\circ$ ) emittiert, im Gegensatz zum echten Experiment. In der Natur findet ein solcher Prozess nie statt! Die eigentlichen Zerfallsraten für die links und rechts dargestellten Zerfälle — d.h. für einen Prozess und den raumgespiegelten — sind unterschiedlich, was einer *Verletzung der Parität* entspricht.

Abbildung III.16 gibt eine alternative schematische Darstellung dieses Experiments, in der die Spins der Teilchen präzisiert werden. Im Ruhesystem des  $^{60}\text{Co}$ -Kerns bleibt der Tochter- $^{60}\text{Ni}$ -Kern auch fast in Ruhe, während das Elektron und das Antineutrino in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses im Zerfallsprozess ist die Projektion des Spins des Antineutrinos  $\bar{\nu}_e$  auf die Richtung seines Impulses positiv.<sup>(55)</sup>



**Abbildung III.16** – Schematische Darstellung der Spinorientierungen im Wu-Experiment.

### III.3.3f Theorien des $\beta$ -Zerfalls

Kurzes Paragraph über Fermi-,  $V-A$ -, elektroschwache Theorie.

### III.3.4 $\gamma$ -Zerfall

Kernphysikalischen Prozesse führen oft im Endzustand zu angeregten Atomkerne. Diese können dann in den Grundzustand — oder auch in einen tiefer liegenden Zustand — übergehen, indem sie ein *Photon* emittieren, d.h. ein mit  $\gamma$  symbolisierten Lichtquant:



Dabei ist die typische Energie des Photons von etwa 100 keV–1 MeV, entsprechend elektromagnetischer Strahlung mit einer Frequenz im  $\gamma$ -Bereich.

<sup>(55)</sup>Diese Projektion des Spins auf die Flugrichtung wird *Helizität* genannt.

In diesem Prozess, der durch die elektromagnetische Wechselwirkung kontrolliert wird, sind Energie, Impuls, Drehimpuls und Parität erhalten, wobei das Photon den Spin und die intrinsische Parität  $J^P = 1^-$  hat.

Mathematisch ergibt sich das Photon aus der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, und genauer dessen Viererpotentials. Da das Letztere ein (Vierer)Vektor ist, verhält sich das Photon wie ein Vektor: Spin 1 und Änderung des Zeichens unter Raumpiegelung.

Sei  $\ell_\gamma$  der Bahndrehimpuls — genauer die mit dem quadrierten Bahndrehimpulsoperator  $\hat{L}^2$  assoziierte Quantenzahl — des Photons. Dem Gesamtdrehimpuls des Photons, der sich aus der Kopplung dessen Spin und Bahndrehimpuls ergibt, entspricht eine Quantenzahl  $j_\gamma$ , die maximal drei positive Werte annehmen kann, und zwar

$$j_\gamma \in \{ \ell_\gamma - 1, \ell_\gamma, \ell_\gamma + 1 \}. \quad (\text{III.39})$$

Außergewöhnlich darf aber  $j_\gamma$  nicht Null sein.

Je größer die Differenz zwischen den Kernspins des Anfangs- und des Endzustands, umso kleiner ist die Übergangswahrscheinlichkeit, d.h. umso länger ist die Halbwertszeit. Beispielsweise hat der  ${}^{178}_{72}\text{Hf}$ -Kern, dessen Grundzustand Spin und Parität  $J^P = 0^+$  hat, einen Isomierzustand mit  $J^P = 8^-$  und Halbwertszeit  $T_{1/2} = 4$  s und einen anderen mit  $J^P = 16^+$  und  $T_{1/2} = 31$  Jahren.

Eine Ausnahme zu dieser Regel bildet der Übergang zwischen zwei Zuständen mit Spin 0, weil der Prozess einfach verboten ist, denn das Photon hätte den Gesamtdrehimpuls  $j_\gamma = 0$ .

Das emittierte Photon hat die gesamte Parität  $P_\gamma = (-1)(-1)^{\ell_\gamma}$ , wobei der erste Faktor die innere Parität, der zweite Faktor die Parität der Wellenfunktion widerspiegelt. Je nach dem Zusammenhang zwischen dieser Parität und dem Gesamtspin wird zwischen zwei Arten von Strahlung unterschiedet:

$$\begin{cases} P_\gamma = (-1)^{j_\gamma} : & \text{elektrische Strahlung,} \\ P_\gamma = -(-1)^{j_\gamma} : & \text{magnetische Strahlung.} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Der erste Fall entspricht offensichtlich  $j_\gamma = \ell_\gamma \pm 1$ , der zweite  $j_\gamma = \ell_\gamma$ .

Dem emittierten Photon entspricht in einer klassischen Beschreibung ein abgestrahltes elektromagnetisches Feld. Dieses kann man zerlegen als Überlagerung von Kugelwellen, deren Winkelabhängigkeiten durch Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  gegeben werden, anstatt wie üblich als Summe von ebenen Wellen  $e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ . Bei diesen Kugelwellen handelt es sich dann um Zustände mit einem bestimmten *Drehimpuls* — anstatt einer bestimmten Impuls bei ebenen Wellen. Der Drehimpuls der elektromagnetischen Strahlung entspricht dem Gesamtdrehimpuls des Photons, d.h.  $\ell = j_\gamma$ . Die Abwesenheit von  $\ell = 0$  bedeutet, dass die Strahlung nie kugelsymmetrisch ist: es handelt sich eher um *Multipolstrahlung* mit „Ordnung“  $\ell$  ( $\ell = 1$ : Dipolstrahlung,  $\ell = 2$ : Quadrupolstrahlung, allgemeiner  $2^\ell$ -Strahlung).

**Bemerkung:** Ein angeregter Kern kann seine Energie  $E^*$  auch direkt auf ein Hüllenelektron des Atoms übertragen, durch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen dem Kern und den Elektronen. Durch diese sog. *innere Konversion* wird ein Elektron mit Energie  $E^* - B_e$  emittiert, mit  $B_e$  die Bindungsenergie des Elektrons. Da sowohl die Werte von  $E^*$  als jene von  $B_e$  quantisiert sind, ist das Spektrum der Elektronen diskret.

### Kinematik des $\gamma$ -Zerfalls. Mößbauer-Effekt

Sei  $E^*$  die Anregungsenergie des Mutterkerns, entsprechend einer Gesamtenergie in dessen Ruhesystem  $m_{\text{Kern}}c^2 + E^*$ , mit  $m_{\text{Kern}}$  der Masse des Tochternuklids. Unter Verwendung der Beziehungen  $E_\gamma = |\vec{p}_\gamma|c$  — das Photon bewegt sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  und ist daher relativistisch —

und  $E_{\text{Kern}} = \vec{p}_{\text{Kern}}^2/2m_{\text{Kern}}$  für die kinetische Energie des Tochterkerns, führen die Erhaltung der Energie und des Impulses

$$E^* = E_{\text{Kern}} + E_\gamma, \quad \vec{0} = \vec{p}_{\text{Kern}} + \vec{p}_\gamma$$

zu

$$E^* = E_\gamma + \frac{(E_\gamma/c)^2}{2m_{\text{Kern}}},$$

woraus sich die Photonenenergie ergibt:

$$E_\gamma \simeq E^* - \frac{E^{*2}}{2m_{\text{Kern}}c^2}. \quad (\text{III.41})$$

Somit ist die Energie  $E_\gamma$  des emittierten Photons nicht genau gleich der Anregungsenergie  $E^*$  des Atomkerns, wobei die Differenz die Rückstoßenergie

$$\frac{E^{*2}}{2m_{\text{Kern}}c^2} \simeq \frac{E_\gamma^2}{2m_{\text{Kern}}c^2} \quad (\text{III.42})$$

des Kerns ist. In ähnlicher Weise wird ein Photon durch einen ruhenden Kern absorbiert, vorausgesetzt seine Energie nicht genau die Anregungsenergie  $E^*$  beträgt, sondern eher

$$E_\gamma \simeq E^* + \frac{E^{*2}}{2m_{\text{Kern}}c^2}, \quad (\text{III.43})$$

wobei die Differenz die Bewegung des Kerns nach der Absorption „kompensiert“.

Die Rückstoßenergie ist zwar viel kleiner als die typische kernphysikalische Energie. Somit ist  $E_\gamma^2/2m_{\text{Kern}}c^2 \approx 5 \text{ eV}$  für  $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$ ,  $A \simeq 100$ . Der Unterschied zwischen den Emissions- und Absorptionsenergien (III.41), (III.43) ist aber groß genug, damit ein emittiertes Photon nicht anschließend durch einen Nachbarkern absorbiert werden kann.

Dabei hilft die natürliche Breite der Spektrallinien,  $\Gamma^* \simeq \hbar/\tau^*$  mit  $\tau^*$  der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustands, nicht, da sie viel kleiner als die Rückstoßenergie ist: mit  $\tau^* \simeq 10^{-9} \text{ s}$ , was schon sehr kurzlebig ist, ergibt sich  $\Gamma^* \simeq 10^{-6} \text{ eV}$ .<sup>(56)</sup>

Wie es Rudolf Mößbauer entdeckt hat [62],<sup>(57)</sup> sind rückstoßfreie Emission und Absorption eines  $\gamma$ -Photons jedoch manchmal möglich, und zwar wenn der emittierende und der absorbierende Kern sich in Kristallen befinden. Dabei muss die Rückstoßenergie des Photons kleiner sein als die minimale Anregungsenergie der Phononen — d.h. der quantisierten Schwingungsmoden — in den Festkörpern. Dann können die Kristallgitter der Letzteren nicht oszillieren, um die Rückstoßenergie als Wärme zu übertragen. Daher bleibt nur eine einzige Möglichkeit bei der Emission und der Absorption, und zwar, dass nicht einzelne Atomkerne, sondern die ganzen Kristalle gegen das Photon zurückstoßen. Da die Masse dieser makroskopischen Körper etwa  $10^{20}$ – $10^{23}$ -mal größer als jene eines einzelnen Kerns ist, wird die Rückstoßenergie um den gleichen Faktor kleiner, d.h. vernachlässigbar.

Mithilfe des Mößbauer-Effekts lassen sich extrem kleine Energiedifferenzen messen, vgl. z.B. Experimente 60 & 61 in Ref. [8]. Insbesondere kann man den Mößbauer-Effekt mit dem Doppler-Effekt kombinieren, indem sich der emittierende und der absorbierende Kern relativ zueinander bewegen, wodurch sich eine kleine Verschiebung der Wellenlänge bzw. Energie des Photons ergibt.

### III.3.5 Andere Zerfallsarten

Neben den häufigen  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Zerfällen existieren noch seltenere Zerfallsarten. Einige davon sind jedoch wichtig für die nukleare Astrophysik, insbesondere zur Erklärung der Entstehung der Elemente.

<sup>(56)</sup>Dagegen sind die Rückstoßenergien in der Atomphysik viel geringer:  $E_\gamma \simeq 10 \text{ eV}$  gibt  $E_\gamma^2/2m_{\text{Atom}}c^2 \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ eV}$ , was kleiner als die typische Breite von Spektrallinien ist.

<sup>(57)</sup>Vgl. auch Ref.[8], Experiment 59.



### III.3.5a Protonen- und Neutronenzerfall

Statt über  $\beta$ -Emission zu zerfallen können protonenreiche bzw. neutronenreiche Nuklide manchmal einfach ein Proton bzw. ein Neutron emittieren. Im ersteren Fall lässt sich der Prozess als



schreiben. Dieser sog. *Protonenzerfall* bzw. *Protonenemission* entspricht in der Nuklidkarte einer Verschiebung um ein Kästchen nach unten.

Wiederum handelt es sich bei dem *Neutronenzerfall*, auch *Neutronenemission* genannt, um den Prozess



entsprechend einer Verschiebung in der Nuklidkarte um ein Kästchen nach links.

Energetisch sind diese Zerfälle möglich, wenn das Mutternuklid schwerer als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte ist. Dementsprechend muss für den Zerfall (III.44) die in Gl. (I.25b) definierte Separationsenergie  $S_p(Z, A)$  negativ sein, während für den Prozess (III.45) die Separationsenergie  $S_n(Z, A)$  [Gl. (I.25a)] negativ sein muss.

Streng genommen sind die Ausgangsnuklide solcher Zerfälle nicht gebunden, da sich einer deren Bestandteile spontan abspalten lässt. Damit ein solches Nuklid vorhanden sei, kann man zwischen zwei Möglichkeiten unterscheiden:

- Eine erste Möglichkeit ist, dass es sich bei dem Mutternuklid um einen angeregten Zustand eines sonst gebundenen Atomkerns handelt.  
Beispielsweise besitzt Kobalt-53 einen metastabilen Isomierzustand  ${}^{53m}_{27}\text{Co}$ , der mit einem Verzweigungsverhältnis von 1,5% in  ${}^{52}_{26}\text{Fe} + p$  übergeht, in den anderen Fällen durch  $\beta^+$ -Emission in  ${}^{53}_{26}\text{Fe}$  zerfällt.
- Die zweite Möglichkeit ist, dass das nicht-gebundene Mutternuklid in dessen Grundzustand als Endprodukt eines Prozesses entsteht — z.B. in spontaner (§ III.3.5 e) oder induzierter (Abschn. IV.1) Spaltung, oder in astrophysikalischen r-Prozessen (Abschn. r-Prozess). In diesem Fall ist das Mutternuklid jenseits der betreffenden *drip line*: rechts bzw. oberhalb von der Neutron- bzw. Proton-drip line, wenn es sich um ein Neutron- bzw. Proton-Emitter handelt.

In beiden Fällen handelt es sich bei dem nicht gebundenen Ausgangszustand eher um eine *Resonanz*, vgl. die Diskussion (8. Feb.: fehlt noch!) in Abschn. II.1.

#### Bemerkungen:

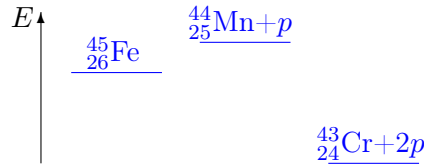
\* Ist ein potentieller Proton-Emitter nur leicht ungebunden, etwa mit einem positiven  $Q$ -Wert  $Q_p \equiv -S_p \lesssim 1$  MeV — dies gilt für die instabilen Nuklide nah an der Proton-drip line —, dann wird die energetisch günstige Protonenemission durch eine Potentialbarriere verzögert. Genau wie bei der  $\alpha$ -Emission führt nämlich die Coulomb-Kraft zu dieser erhöhten Barriere zwischen dem instabilen gebundenen Zustand — in dem das Proton über die starke Kraft durch die anderen Nukleonen angezogen wird — und dem stabileren getrennten Zustand — in dem die Coulomb-Abstoßung zwischen dem Proton und dem Tochterkern herrscht. Dementsprechend ist die Protonenemission wieder ein Tunnelprozess.

\* Dagegen verläuft Neutronenemission meistens sehr schnell, und zwar mit einer Halbwertszeit von einem Bruchteil der Sekunde, mit einigen Ausnahmen, die für die Steuerung von Kernreaktoren äußerst wichtig sind, vgl. Abschn. Kernreaktoren.

### III.3.5b Doppelter Protonen- und Neutronenzerfall

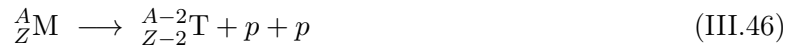
Wegen der Paarungseffekte zwischen zwei identischen Nukleonen in einem Nuklid sind noch weitere Zerfallswege möglich. Somit können protonenreiche bzw. neutronenreiche Nuklide zwei Protonen bzw. Neutronen gleichzeitig emittieren, während die Abspaltung eines einzelnen Protons bzw.

Neutrons nicht beobachtet wird oder sogar energetisch unmöglich ist. Als Beispiel der letzteren Möglichkeit zeigt Abb. III.17 die Energien vom Zwei-Protonen-Emitter  ${}^{45}_{26}\text{Fe}$ , seinem Zerfallsprodukt  ${}^{43}_{24}\text{Cr}$  begleitet von zwei Protonen, und dem dazwischen liegenden Nuklid  ${}^{44}_{25}\text{Mn}$  mit einem freien Proton: im Grundzustand kann  ${}^{45}_{26}\text{Fe}$  ein einzelnes Proton nicht emittieren, die Emission von zwei Protonen ist aber energetisch günstig.



**Abbildung III.17** – Energieniveaus von  ${}^{45}_{26}\text{Fe}$ ,  ${}^{44}_{25}\text{Mn}$  mit einem Proton und  ${}^{43}_{24}\text{Cr}$  mit 2 Protonen.

Dementsprechend findet man den 2002 entdeckten [63, 64] *doppelten Protonenzerfall* (oder *Zwei-Protonen-Emission*)

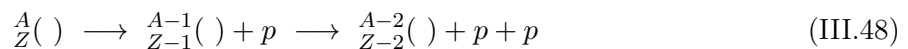


und den *doppelten Neutronenzerfall* (*Zwei-Neutronen-Emission*)



Im ersteren bzw. letzteren Fall ergibt sich in der Nuklidkarte eine Verschiebung um zwei Kästchen nach unten bzw. links.

Solche Prozesse sind echte Drei-Teilchen-Zerfälle, wie die  $\beta$ -Zerfälle. Dagegen sind aufeinander folgende Ein-Proton-Emissionen



(bzw. Ein-Neutron-Emissionen) Zwei-Körper-Zerfälle. Dementsprechend lässt sich aus der Kinematik der Endprodukte, insbesondere der Protonen (bzw. der Neutronen, deren Impulse aber viel schwieriger zu messen sind), zwischen den zwei Möglichkeiten (III.46) und (III.48) unterscheiden.

Alle bekannten Zwei-Protonen-Emitter, die schon im Grundzustand gegen doppelten Protonenzerfall instabil sind, besitzen eine gerade Anzahl von Protonen, wie z.B. <sup>(58)</sup> die relativ „langlebigen“ Nuklide  ${}^{45}_{26}\text{Fe}$ ,  ${}^{48}_{28}\text{Ni}$ ,  ${}^{54}_{30}\text{Zn}$ , mit Halbwertszeiten  $T_{1/2} \gtrsim 1$  ms. Dies lässt sich nach den Diskussionen im Kap. II, insbesondere über die höhere Stabilität von Kernen mit gerader Protonenzahl im Vergleich zu denen mit ungerader  $Z$ , einfach nachvollziehen: emittiert ein solches Nuklid, d.h. ein gg- bzw. gu-Kern, ein einzelnes Proton, so wird es zu einem ug- bzw. uu-Nuklid mit einem ungepaarten Proton, entsprechend einer Minderung der Stabilität, was das Energieschema von Abb. III.17 passt; dagegen kann die Emission von zwei Protonen günstig sein. Im Gegensatz ist im Fall eines Ausgangsnuklids mit ungerader Protonenzahl  $Z$  der gg- bzw. gu-Kern mit einem Proton weniger meistens stabiler als der ug- bzw. gg-Kern mit  $Z-2$  Protonen, d.h. Ein-Proton-Emission ist möglich, Zwei-Protonen-Emission unwahrscheinlich.

Ähnlich hat das einzige (Anfang 2015) bekannte Nuklid, das aus seinem Grundzustand zwei Neutronen emittiert, und zwar  ${}^{16}_4\text{Be}$  [65], eine gerade Neutronenzahl  $N = 12$ .

### III.3.5c Doppelter $\beta$ -Zerfall

Die erhöhte Stabilität von Nukliden mit einer geraden Zahl von Protonen und Neutronen führt zur Existenz einer weiteren Art von Zerfällen. Betrachte man noch einmal die rechte Spalte von Abb. II.3, die die Massen der Kerne mit unterschiedlicher Protonenzahl  $Z$  innerhalb einer Isobarenreihe mit gerader Nukleonenzahl  $A$  zeigt. Während der Atomkern mit Protonenzahl  $Z_{\min}$  absolut stabil ist gegen Zerfälle, bei denen  $A$  konstant bleibt, gilt dies nicht für das Nuklid mit  $Z = Z_{\min} + 2$ ,

<sup>(58)</sup>Dazu gibt es noch  ${}^6_4\text{Be}$ ,  ${}^8_6\text{C}$ ,  ${}^{12}_8\text{O}$ ,  ${}^{16}_{10}\text{Ne}$  — mit  $T_{1/2} < 10^{-20}$  s — und  ${}^{19}_{12}\text{Mg}$  mit  $T_{1/2} = 4$  ps.

auch wenn das Letztere stabil gegen  $\beta$ -Zerfälle ist. Im Prinzip könnte Energie gewonnen werden, indem zwei Protonen des Nuklids mit  $Z = Z_{\min} + 2$  in zwei Neutronen umwandelt werden — dabei müssen die Umwandlungen jedoch gleichzeitig sein.

Eigentlich wurde *doppelter  $\beta$ -Zerfall* für ein paar Atomkerne experimentell beobachtet, und zwar entweder doppelter  $\beta^-$ -Zerfall



mit der Umwandlung von zwei Neutronen in zwei Protonen, oder doppelter Elektroneneinfang



wobei zwei Protonen sich in zwei Neutronen umwandeln.

Der erstere Zerfall, dessen Möglichkeit ursprünglich durch M. Goeppert-Mayer vorgeschlagen wurde [66], findet beispielsweise bei  ${}^{76}_{32}\text{Ge}$  (mit Halbwertszeit  $T_{1/2} = 1,926 \cdot 10^{21}$  Jahre [67]) oder  ${}^{136}_{54}\text{Xe}$  ( $T_{1/2} = 2,165 \cdot 10^{21}$  Jahre [68]) statt. Der letztere Prozess, in welchem die zwei Elektronen aus der K-Schale der Atomhülle eingefangen sind, wurde bei  ${}^{130}_{56}\text{Ba}$  ( $T_{1/2} \simeq 1,4 \cdot 10^{21}$  Jahre) und  ${}^{78}_{36}\text{Kr}$  ( $T_{1/2} \simeq 9,2 \cdot 10^{21}$  Jahre) beobachtet [69, 70].<sup>(59)</sup>

Prinzipiell könnten noch doppelter  $\beta^+$ -Zerfall



oder die Kombination eines Elektroneneinfangs mit einem  $\beta^+$ -Zerfall



stattfinden. Da der  $Q$ -Wert für  $\beta^+$ -Zerfall immer kleiner als jener für Elektroneneinfang ist, wie in Abb. III.13 dargestellt wird, sind diese Prozesse jedoch weniger wahrscheinlich als der Prozess (III.50), und sie wurden noch nicht experimentell beobachtet.

Offensichtlich sind die Halbwertszeiten von doppelten  $\beta$ -Zerfällen sehr groß [71], d.h. sie sind seltene Prozesse. Die theoretische Erklärung ist, dass es sich dabei um Prozesse zweiter Ordnung (in der Wechselwirkung zwischen Proton, Neutron, Elektron/Positron und Antineutrino/Neutrino) in Störungsrechnung handelt, die also eine viel geringere Wahrscheinlichkeit haben, als Prozesse erster Ordnung wie die  $\beta$ -Zerfälle [66].

Experimentell bedeutet diese Tatsache, dass die Situation mit verbotenen  $\beta$ -Zerfall viel günstiger ist, um den Prozess zu beobachten: sonst kommen die meisten Elektronen/Positronen aus den  $\beta$ -Zerfällen, und solche aus doppelten Zerfällen können nicht identifiziert werden.

### Neutrinoloser doppelter $\beta$ -Zerfall

Theoretisch könnte das (Elektron-)Neutrino sein eigenes Antiteilchen sein, also  $\nu_e = \bar{\nu}_e$ . In diesem Falle darf das Neutrino keine erhaltene Quantenzahl tragen: insbesondere muss es die Leptonenzahl  $\mathcal{L} = 0$  haben. Dementsprechend wäre die  $\mathcal{L}$  keine „gute“ Quantenzahl mehr, da sie in normalen  $\beta$ -Zerfällen nicht erhalten wäre.

Nach den heutigen Theorien wäre das kein grundsätzliches Problem, denn die Baryonen- und Leptonenzahl hängen nicht mit Symmetrien zusammen, wie es dagegen der Fall der elektrischen Ladung ist.

Falls es sein eigenes Antiteilchen wäre, würde das Neutrino das erste bekannte Beispiel einer neuen Art von Elementarteilchen sein, und zwar es wäre ein sog. *Majorana-Teilchen* — dagegen sind die „üblichen“, von deren Antiteilchen verschiedenen, Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, wie das Elektron, *Dirac-Teilchen*.

<sup>(59)</sup> Bei  ${}^{130}_{56}\text{Ba}$  ist nicht bekannt, ob der Prozess vielleicht (teilweise) neutrinolos ist.

Dann werden neue Prozesse möglich, insbesondere neutrinolose doppelte  $\beta$ -Zerfälle, wie z.B.



Solche Zerfälle werden aktiv experimentell untersucht. Bis auf einer umstrittenen Behauptung sind sie Ergebnisse bisher negativ, mit nur unteren Schranken über die Halbwertszeiten der neutrinolosen Kanäle: z.B.  $T_{1/2}^{0\nu} > 2,1 \cdot 10^{25}$  Jahre für  ${}^{76}\text{Ge}$  [72] oder  $T_{1/2}^{0\nu} > 1,9 \cdot 10^{25}$  Jahre für  ${}^{136}\text{Xe}$  [73].

### III.3.5d Emission von leichten Kernen

Eine andere, seltene Art von radioaktiver Zerfall ist die 1984 entdeckte [74] spontane Emission durch schwere Nuklide — und zwar mit  $Z \geq 87$ , entsprechend  $A \geq 221$  — von einem leichten Kern, der jedoch schwerer als ein  $\alpha$ -Teilchen ist. Dieser Prozess wird auch *Clusterzerfall* genannt.

Dabei werden meistens gg-Kerne emittiert:  ${}^{14}\text{C}$ ,  ${}^{20}\text{O}$ ,  ${}^{24}\text{Ne}$ ,  ${}^{26}\text{Ne}$ ,  ${}^{28}\text{Mg}$ ,  ${}^{30}\text{Mg}$ ,  ${}^{32}\text{Si}$ ,  ${}^{34}\text{Si}$ . Das (schwere) Tochternuklid hat sehr oft eine magische Protonen- oder Neutronenzahl,  $Z = 82$  oder  $N = 126$ .

Diese Tatsache erklärt die Ausnahmen zur angegebenen Regelmäßigkeit für den emittierten Kern. Somit emittiert z.B.  ${}^{231}_{91}\text{Pa}$  einen  ${}^{23}_{9}\text{F}$ -Kern, dabei ist das Tochternuklid der doppelmagische  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ -Kern.

### III.3.5e Spontane Spaltung

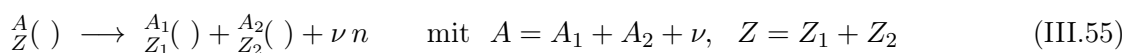
Im Gegensatz zum Clusterzerfall entstehen bei der *spontanen Spaltung* eines schweren Atomkerns zwei Fragmente mit Massen der gleichen Größenordnung:



wobei  $A_1$  bzw.  $Z_1$  nicht sehr unterschiedlich von  $A/2$  bzw.  $Z/2$  ist. Bisher wurde dieser Prozess nur für Kerne schwerer als  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  beobachtet, wie z.B. bei den natürlich auftretenden Atomkernen  ${}^{234}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{235}_{92}\text{U}$  und  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .

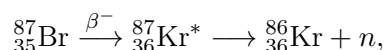
Jedes spaltbare Nuklid kann in mehrere Spaltungskanäle zerfallen, entsprechend unterschiedlichen Werten von  $A_1$  und  $Z_1$ . Typischerweise, und zwar für die spaltbaren Kerne von  ${}_{90}\text{Th}$  bis  ${}_{98}\text{Cf}$ , haben die zwei Spaltprodukte ungleiche Massen — genauer sind die Verzweigungsverhältnisse der Kanäle mit Produkten gleicher Massen viel geringer als solche der Kanäle mit Produkte ungleicher Massen. Eine Ausnahme bildet  ${}^{257}_{100}\text{Fm}$ , bei dem symmetrische Spaltung günstig ist.

In jedem Falle sind die Spaltprodukte von  $\beta$ -stabilen Kernen sehr neutronenreich, wegen der konkaven Form der  $\beta$ -Stabilitätslinie in der  $N$ - $Z$ -Ebene. Daher emittieren sie sehr schnell, d.h. nach  $10^{-16}$ – $10^{-14}$  s, ein paar sog. *prompte* Neutronen, und zwar von 1 bis 4 pro Spaltung. Dementsprechend wird ein gegebener Zerfallskanal oft als



geschrieben, mit  $\nu$  der Anzahl der prompten Neutronen.

**Bemerkung:** Da die Spaltprodukte neutronenreich sind, können sie auch über  $\beta^-$ -Emission zerfallen, was länger dauert. In seltenen Fällen führt ein solcher Prozess zu einem Tochternuklid, das spontan ein Neutron emittieren wird, z.B. <sup>(60)</sup>



wobei  ${}^{87}_{35}\text{Br}$  die Halbwertszeit  $T_{1/2} = 55,65$  s hat. In diesem Falle werden die Neutronen als *verzögert* bezeichnet.

### Spaltungsparameter

Energetisch ist der Prozess (III.54) möglich, sobald der Wert

$$Q_{\text{s.f.}} \equiv [m(Z, A) - m(Z_1, A_1) - m(Z - Z_1, A - A_1)]c^2 \quad (\text{III.56})$$

<sup>(60)</sup>Die im  $\beta^-$ -Zerfall emittierten Elektron und Antineutrino werden hier nicht geschrieben.

positiv ist, wobei das Kürzel s.f. für *spontaneous fission* steht. Betrachtet man der Einfachheit halber symmetrische Spaltung, d.h.  $Z_1 = Z/2$ ,  $A_1 = A/2$ , so lautet das Kriterium

$$\left[ m(Z, A) - 2m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \right] c^2 > 0. \quad (\text{III.57})$$

Dabei kann man in erster Näherung die Massen mithilfe der Bethe–Weizsäcker-Massenformel (II.2) ausdrücken, unter Auslassung des Paarungsterms. Die Volumen- und Asymmetrie-Beiträge kürzen sich, und es bleibt die Bedingung

$$a_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) > 0$$

übrig. Dies lässt sich noch als eine untere Schranke über den Wert des sog. *Spaltungsparameters*  $Z^2/A$  ausdrücken: im Rahmen der Bethe–Weizsäcker-Formel für sphärische Atomkerne ist die spontane Spaltung des Nuklids  ${}^A_Z(\ )$  möglich vorausgesetzt

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{(2^{1/3} - 1)a_S}{(1 - 2^{-2/3})a_C}.$$

Mit den in § II.2.1 angegebenen Werten von  $a_S$  und  $a_C$  beträgt die Zahl auf der rechten Seite dieser Ungleichung ungefähr 18,14: für Kerne im  $\beta$ -Stabilitätstal, d.h. mit  $Z = Z_{\min}(A)$  [Gl. (II.3)] ergibt sich  $A > 95$  bzw.  $Z > 42$ . Das verwendete Bild von sphärischen Nukliden ist zwar vereinfacht (s. unten), jedoch die Diskrepanz zwischen diesen aus energetischen Überlegungen gewonnenen theoretischen Werten und den experimentell beobachteten Werten  $A \geq 232$ ,  $Z \geq 90$  weist darauf hin, dass die Bedingung  $Q_{\text{s.f.}} > 0$  wahrscheinlich nicht hinreichend ist.

Anstatt von sphärischen Kernen kann man deformierte Nuklide annehmen: dabei ist die einfachste Möglichkeit, dass das spaltende Nuklid ein prolates Ellipsoid ist. Bezeichnet man die Länge dessen langen bzw. kurzen Halbachse als  $R(1+\epsilon)$  bzw.  $R/\sqrt{1+\epsilon}$ , so dass sein Volumen  $\frac{4}{3}\pi R^3$  unabhängig vom Deformationsparameter  $\epsilon$  ist, so ist die Kernoberfläche  $4\pi R^2[1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)]$  größer als für ein sphärischer Kern, während die Coulomb-Bindungsenergie  $-a_C[1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)]Z^2/A^{1/3}$  geringer wird. Dann findet man für die Differenz zwischen den Bindungsenergien  $B(\epsilon)$  des deformierten Kerns und  $B(0)$  des sphärischen Nuklids mit gleichen  $Z$  und  $A$

$$B(\epsilon) - B(0) = \left( -\frac{2}{5}a_S A^{2/3} + \frac{1}{5}a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) \epsilon^2.$$

Falls dies negativ ist, ist der sphärische Zustand bevorzugt, d.h. der Kern ist stabil gegen Deformationen. Dagegen ist der Kern instabil gegen solche Verformungen, und wird somit spontan spalten, wenn die Differenz positiv ist, d.h. für Spaltungsparameter  $Z^2/A > 2a_S/a_C \simeq 51,66$ .

N. Bohr und A. Wheeler haben im Rahmen des Tröpfchenmodells eine raffiniertere Analyse der Stabilität des Kerns gegen Deformationen durchgeführt [75] und fanden dabei einen Grenzwert für  $Z^2/A > 47,8$ .

Diese Tatsache erinnert an das ähnliche Verhalten beim  $\alpha$ -Zerfall (§ III.3.2). Eigentlich ist die Erklärung ist die gleiche, und zwar die Existenz einer Coulomb-Potentialbarriere zwischen dem Anfangs- und dem Endzustand. Betrachte man z.B. die symmetrische spontane Spaltung von  ${}^{238}_{92}\text{U}$  in zwei (instabile)  ${}^{119}_{46}\text{Pd}$ -Kerne. Wenn die Letzteren sich berühren, d.h. wenn der Abstand zwischen deren Zentren gleich zweimal dem Kernradius  $R \simeq 6,3$  fm ist, ist die zugehörige Coulomb potentielle Energie  $V_{\text{Coul.}} = (Ze)^2/(4\pi\epsilon_0 2R) \simeq 250$  MeV. Für den Prozess  ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow 2 {}^{119}_{46}\text{Pd}$  beträgt der  $Q$ -Wert (III.56) nur  $Q_{\text{s.f.}} = 214$  MeV, kleiner als  $V_{\text{Coul.}}$ . Somit gibt es eine durch die Potentialbarriere bedingte Spaltschwelle von etwa 35 MeV zwischen  ${}^{238}_{92}\text{U}$  und dem Endzustand bestehend aus zwei getrennten  ${}^{119}_{46}\text{Pd}$ -Kernen. Deshalb kann die spontane Spaltung in diesem Falle nur durch das *Tunneln* durch die Potentialbarriere stattfinden — wie beim  $\alpha$ -Zerfall.

Allgemeiner ist spontane Spaltung, wenn sie nicht „instantan“ ist, durch den Tunneleffekt verursacht, so dass die Halbwertszeiten je nach der Spaltschwelle sehr unterschiedlich sein können. Für

die asymmetrische Spaltung  ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{79}_{30}\text{Zn} + {}^{159}_{62}\text{Sm}$  beträgt  $V_{\text{Coul.}}$  221 MeV, was zu einer niedrigeren Barriere von 7 MeV führt. Dementsprechend ist das Verzweigungsverhältnis für diesen Spaltkanal viel höher als für die symmetrische Spaltung.

Ein wichtiger Unterschied mit dem  $\alpha$ -Zerfall ist jedoch, dass das mittlere Potential sich während des Prozesses stark verändert — der schwerste Tochterkern ist schon sehr unterschiedlich vom Mutterkern —, was sich auch in den großen Deformationen des spaltenden Nuklids widerspiegelt.

#### **Bemerkungen:**

\* In der Herleitung des einfachen  $Z^2/A$ -Kriteriums wurden nur die Oberflächen- und Coulomb-Energien berücksichtigt. In mehr realistischen Modellen wurde noch die (Isospin-) Asymmetrie-Energie zwischen Protonen und Neutronen eine Rolle spielen, denn das einschließende Potential hängt von der Asymmetrie  $N - Z$  ab. Dazu sollte die rein kollektive Beschreibung der Deformationen korrigiert werden, indem sog. *Schaleneffekte* ins Betracht gezogen werden. Unter Berücksichtigung solcher Korrekturen ergibt sich ein komplizierteres Kriterium für spontane Spaltung.

\* Die oben berechneten  $Q_{\text{s.f.}}$ -Werte werden letztendlich durch die Coulomb-Abstoßung zwischen Spaltprodukte in kinetische Energie umgewandelt: die emittierten Kerne können hohe Geschwindigkeiten erreichen.

### **Literatur zum Kapitel III**

- Friedmann [4], Kap. 8.7, 10 & 11.
- Mayer-Kuckuk [5], Kap. 3 & 8.

# Anhang zum Kapitel III

## III.A $\alpha$ -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit

Gleichung (III.23a) soll in den drei in Abb. III.8 definierten Gebieten I, II und III gelöst werden. Die Kontinuitätsbedingungen für die Wellenfunktion  $\psi_\alpha$  und seine Ableitung  $d\psi_\alpha/dr$  bei dem „klassischen Umkehrpunkt“  $r = r_c$  und bei  $r = R$  erlauben dann das Zusammenkleben der in den drei Gebieten erhaltenen Wellenfunktionen.

$$u(r) \equiv r\psi_\alpha(r):$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_\alpha(r)]u(r) = 0 \quad (\text{III.58})$$

Der Ansatz  $u(r) = e^{\Phi(r)}$  führt dann zur differentiellen Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[V_\alpha(r) - E] \equiv \frac{g(r)}{\hbar^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } R < r < r_c, \\ < 0 & \text{für } r < R \text{ oder } r > r_c. \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Die WKB-Methode (Wentzel, Kramers, Brillouin) liefert eine annähernde Lösung  $\Phi$  solange in der linken Seite der Gleichung der erste Term vernachlässigbar bezüglich des zweiten Terms ist. Das Einsetzen des Ansatzes

$$\Phi \equiv \frac{1}{\hbar}\Phi_0 + \Phi_1 + \hbar\Phi_2 + \dots$$

in Gl. (III.59) unter der Gültigkeitsbedingung  $\left|\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right| \ll \left|\frac{d\Phi}{dr}\right|^2$  gibt

$$\text{- zur führenden } \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar^2}\right) \text{ Ordnung: } \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{d\Phi_0}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\hbar^2}g(r), \text{ d.h. } \Phi_0(r) = \pm \int^r \sqrt{g(r')} dr';$$

$$\text{- zur } \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right)\text{-Ordnung: } \frac{1}{\hbar}\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{\hbar}\frac{d\Phi_0}{dr}\frac{d\Phi_1}{dr} = 0, \text{ sodass } \Phi_1(r) = -\frac{1}{2}\ln\frac{d\Phi_0}{dr} = -\frac{1}{4}\ln|g(r)|, \text{ usw.}$$

Insgesamt ergibt sich also die WKB-Lösung

$$u(r) = \frac{1}{|g(r)|^{1/4}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int^r \sqrt{g(r')} dr'}. \quad (\text{III.60})$$

Im Fall des Tunneleffekts durch eine Barriere gilt

$$\frac{\sqrt{g(r)}}{\hbar} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V_{0,\alpha} + E]} \equiv K & \text{für } r < R \text{ (Gebiet I);} & (\text{III.61a}) \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V_\alpha(r) - E]} \equiv \kappa(r) & \text{für } R < r < r_c \text{ (Gebiet II);} & (\text{III.61b}) \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[E - V_\alpha(r)]} \equiv k(r) & \text{für } r > r_c \text{ (Gebiet III).} & (\text{III.61c}) \end{cases}$$

Die betreffenden reduzierten Wellenfunktionen sind

$$u_{\text{I}}(r) = A e^{iKr} + B e^{-iKr}, \quad (\text{III.62a})$$

$$u_{\text{II}}(r) = \frac{C}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left[\int_r^{r_c} \kappa(r') dr'\right] + \frac{D}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left[-\int_r^{r_c} \kappa(r') dr'\right] \quad (\text{III.62b})$$

$$\text{und } u_{\text{III}}(r) = \frac{E}{\sqrt{k(r)}} \exp\left[i\int_{r_c}^r k(r') dr'\right] + \frac{F}{\sqrt{k(r)}} \exp\left[-i\int_{r_c}^r k(r') dr'\right], \quad (\text{III.62c})$$

wobei  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  Konstanten sind, die den Kontinuitätsbedingungen

$$u_{\text{I}}(R) = u_{\text{II}}(R), \quad \frac{du_{\text{I}}}{dr}(R) = \frac{du_{\text{II}}}{dr}(R), \quad u_{\text{II}}(r_c) = u_{\text{III}}(r_c), \quad \frac{du_{\text{II}}}{dr}(r_c) = \frac{du_{\text{III}}}{dr}(r_c)$$

(entsprechend den analogen Bedingungen für die Wellenfunktionen  $\psi_i(r) = u_i(r)/r$ ,  $i = \text{I, II, III}$ ) genügen sollen.<sup>(61)</sup>

---

<sup>(61)</sup> Bei dem klassischen Umkehrpunkt  $r = r_c$  sind aber die durch Gl. (III.62b)–(III.62c) definierten Funktionen  $u_{\text{II}}$  und  $u_{\text{III}}$  unendlich, was die Ungültigkeit der Bedingung  $|d^2\Phi/dr^2| \ll |d\Phi/dr|^2$  spiegelt. Statt denen soll man lokal die durch ein anderes Näherungsverfahren erhaltenen Funktionen benutzen, oder einfach  $u(r) = \exp[\pm \int \sqrt{g(r')} dr']$ , wobei der Integrand bei  $r = r_c$  tatsächlich verschwindet.



# KAPITEL IV

## Kernenergie

---

IV.1	Induzierte Spaltung	91
IV.1.1	Grundlagen der induzierten Spaltung	91
IV.1.2	Neutronenquerschnitte	92
IV.1.3	Spaltprodukte	93
IV.2	Kettenreaktion	94
IV.2.1	Grundlagen	94
IV.2.2	Kernenergie	95
IV.2.3	Reaktortypen	97
IV.3	Kernfusion	97

---

### IV.1 Induzierte Spaltung

Die Spaltbarriere, die die energetisch mögliche spontane Spaltung eines Kerns verhindert (vgl. § III.3.5 e), kann durch die Absorption eines Teilchens überwunden werden: man spricht dann von einer *induzierten Spaltung*.

#### IV.1.1 Grundlagen der induzierten Spaltung

Eine nicht-vernachlässigbare Absorption mit anschließender Spaltung kann nur mit Neutronen stattfinden: positiv geladene Teilchen – meistens Protonen oder  $\alpha$ -Teilchen – werden durch die positive elektrische Ladung des Kerns abgestoßen; während negativ geladene Teilchen – Elektronen – können nicht wirksam Spaltungen induzieren (ihre Wechselwirkung mit dem Kern ist elektromagnetischer Natur und kann daher die Struktur des Kerns für übliche Energien nicht viel modifizieren). Im Folgenden wird also nur die durch Neutronen induzierte Spaltung diskutiert. Außerdem wird nur der Fall nicht-relativistischer Neutronen – d.h. mit einer kinetischen Energie  $E_{n_{\text{kin}}} \ll 1 \text{ GeV}$  – in Betracht gezogen.

Die Reaktion  $n + {}^A_Z\text{X}$  führt zuerst zum angeregten *Compoundkern*  ${}^{A+1}_Z\text{X}^*$ .

Unter der Annahme, dass die kinetische Energie  $E_{n_{\text{kin}}}$  des eingebrachten Neutrons sich sofort auf *alle* Nukleonen des Zielkerns verteilt („Sandsackmodell“), hat keines von den Nukleonen des Zwischenkerns genügend Energie, um den Kern sofort wieder zu lassen: der Zwischenzustand ist gebunden und kann also als einen Kern betrachtet werden. Wegen der zugefügten kinetischen Energie ist dieser Compoundkern aber sehr deformiert, so dass er instabil ist und nach kurzer Zeit  $\approx 10^{-19} \text{ s}$  zerfällt.

Im Rahmen des Tröpfchenmodells des Atomkerns hat Niels Bohr 1936 die Streuung von zwei Kernen als eine Kollision von zwei Flüssigkeitstropfen beschreibt. Die Tropfen können sich vereinigen und einen großen, meist schnell vibrierenden und rotierenden Tropfen bilden, der wegen der zugefügten Energie instabil ist und wieder zerfällt.

Dieser Compoundkern kann dann entweder ein Neutron emittieren – möglicherweise mit derselben Energie als diejenige des einfallenden Neutrons, sodass die Streuung  $n + \text{X} \rightarrow n + \text{X}$  insgesamt

elastisch ist; sonst ist die Streuung inelastisch –, oder seine Anregungsenergie durch die Emission eines Photons abgeben, oder er kann spalten. Den verschiedenen Möglichkeiten werden betreffende Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{\text{el}}$ ,  $\sigma_{\text{inel}}$ ,  $\sigma_{(n,\gamma)}$ ,  $\sigma_{\text{Sp}}$  zugeordnet, sowie ein totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} + \sigma_{(n,\gamma)} + \sigma_{\text{Sp}}$ . Diese sogenannten *Neutronenquerschnitte* werden in Abschnitt IV.1.2 diskutiert.

### Wichtiges Beispiel eines spaltbaren Kerns: Uran

Die Eigenschaften der induzierten Spaltung werden aufgrund seiner wirtschaftlichen Bedeutung mithilfe vom Beispiel des Urankerns dargestellt.

Uran ( ${}_{92}\text{U}$ ) besitzt drei natürlich vorkommende Isotope:

Isotop	Halbwertszeit $T_{1/2}$	heutiger Anteil
${}^{234}\text{U}$	$2,455 \cdot 10^5$ Jahre	0,0054%
${}^{235}\text{U}$	$7,04 \cdot 10^8$ Jahre	0,7204%
${}^{238}\text{U}$	$4,468 \cdot 10^9$ Jahre	99,2742%

Wegen seiner geringen Häufigkeit wird  ${}^{234}\text{U}$  nicht weiter in Betracht kommen.

- $n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{236}\text{U}^*$ : Im Ruhesystem des  ${}^{235}\text{U}$ -Kerns lautet die Erhaltung der Energie in der Reaktion<sup>(62)</sup>

$$m({}^{236}\text{U}^*)c^2 = m_n c^2 + E_{n_{\text{kin}}} + m({}^{235}\text{U})c^2,$$

sodass die Anregungsenergie  $E^* = [m({}^{236}\text{U}^*) - m({}^{236}\text{U})]c^2$  des erzeugten Compoundkerns  ${}^{236}\text{U}^*$  ist

$$E^* = [m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{236}\text{U})]c^2 + E_{n_{\text{kin}}} = S_n({}^{236}\text{U}) + E_{n_{\text{kin}}},$$

wobei  $S_n({}^{236}\text{U}) \simeq 6,5$  MeV die Separationsenergie (I.25a) für die Abspaltung eines Neutrons ist.

Die Spaltschwelle für  ${}^{236}\text{U}$  ist  $\Delta E_{\text{Sp}}({}^{236}\text{U}) \simeq 5,7$  MeV, und zwar kleiner als  $E^*$  für jeden Wert der kinetischen Energie  $E_{n_{\text{kin}}}$  des Neutrons: der erzeugte angeregte Compoundkern  ${}^{236}\text{U}^*$  kann spalten, ohne eine Energiebarriere zu überwinden zu haben.

- $n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{U}^*$ : Ähnlich dem Fall der induzierten Spaltung von  ${}^{235}\text{U}$  findet man, dass die Anregungsenergie des Compoundkerns  ${}^{239}\text{U}^*$  durch  $E^* = S_n({}^{239}\text{U}) + E_{n_{\text{kin}}}$  gegeben ist. Der gu-Kern  ${}^{239}\text{U}$  besitzt ein ungepaartes Neutron, dessen Separationsenergie erheblich kleiner als jene des gg-Nachbarkerns  ${}^{236}\text{U}$  ist:  $S_n({}^{239}\text{U}) \simeq 4,8$  MeV. Dies ist kleiner als die Höhe  $\Delta E_{\text{Sp}}({}^{239}\text{U}) \simeq 6,2$  MeV der Spaltbarriere von  ${}^{239}\text{U}$ : Um eine Spaltung induzieren zu können ist eine kinetische Energie des Neutrons  $E_{n_{\text{kin}}} > 1,4$  MeV nötig, sonst ist die Anregungsenergie des erzeugten Compoundkerns nicht hoch genug, um die Spaltbarriere zu überwinden.

Deshalb ist die Neutron-induzierte Spaltung von  ${}^{235}\text{U}$  leichter als diejenige von  ${}^{238}\text{U}$ . Allgemein sind die gu-Kerne –  ${}^{233}\text{U}$ ,  ${}^{235}\text{U}$ ,  ${}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}^{241}\text{Pu}$  – leichter spaltbar als die gg-Kerne –  ${}^{232}\text{Th}$ ,  ${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{240}\text{Pu}$ ,  ${}^{242}\text{Pu}$ .

## IV.1.2 Neutronenquerschnitte

Für  ${}^{235}\text{U}$ : drei Bereiche.

**Gebiet I:**  $\frac{\sigma_{\text{Sp.}}}{\sigma_{\text{tot.}}} \approx 84\%$  und  $\sigma_{\text{tot.}} \propto 1/v$  mit  $v$  der Neutronengeschwindigkeit.

**Gebiet II:** Resonanzen: „radiative capture“ ( $n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{236}\text{U}^* \rightarrow {}^{236}\text{U} + \gamma$ ) dominiert den totalen Wirkungsquerschnitt.

<sup>(62)</sup>Die Rückstoßenergie des Compoundkerns wird vernachlässigt.

**Gebiet III:** elastische und inelastische Streuung, wenige Spaltung.

Offensichtlich ist es günstiger, Neutronen mit kleinerer kinetischer Energie zu verwenden, insbesondere sog. *thermische Neutronen*, mit  $E_{n_{\text{kin}}} \simeq 0,025 \text{ eV} = k_B T$  mit  $T \approx 300 \text{ K}$ .

Für  $^{238}\text{U}$ :

**Gebiet I:**  $\sigma_{\text{Sp.}} = 0$ ,  $\sigma_{\text{tot.}}$  ungefähr konstant.

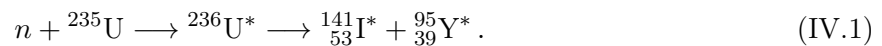
**Gebiet II:** Resonanzen

**Gebiet III:** ab  $E_{n_{\text{kin}}} = 1,4 \text{ MeV}$  findet induzierte Spaltung statt.

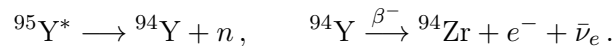
### IV.1.3 Spaltprodukte

Wegen des großen Neutronenüberschusses bei spaltbaren Nukliden (z.B.  $N/Z \simeq 1,57$  für  $^{236}\text{U}^*$ ) sind die Spaltprodukte ebenfalls neutronenreich: deshalb werden diese Produkte spontan ein paar prompte Neutronen emittieren bzw. über  $\beta^-$ -Emission zerfallen, wobei die Zerfallsprodukte möglicherweise verzögerte Neutronen emittieren können.

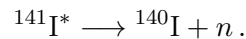
Somit führt die induzierte Spaltung  $n + ^{235}\text{U} \rightarrow ^{236}\text{U}^*$  zu zwei großen meist angeregten Fragmenten mit Massen- und Protonenzahlen  $A \approx 140$ ,  $Z \approx 55$  (I, Xe, Cs, Ba, La) bzw.  $A \approx 95$ ,  $Z \approx 37$  (Br, Kr, Rb, Sr, Y), z.B.



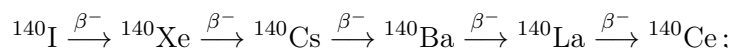
Dann führt das leichtere Fragment nach einer prompten Neutronenemission und einem  $\beta^-$ -Zerfall zum stabilen  $^{94}\text{Zr}$ -Kern:



Währenddessen zerfällt  $^{141}\text{I}^*$  über prompten Neutronenzerfall:



Dem instabilen  $^{140}\text{I}$ -Nuklid, dessen Halbwertszeit 0,86 s beträgt, stehen zwei Zerfallskanäle zur Verfügung: meistens wandelt es sich über  $\beta^-$ -Zerfall in den Grundzustand von  $^{140}\text{Xe}$  um, was nach 4 weiteren  $\beta^-$ -Zerfällen zu  $^{140}\text{Ce}$  führt (der Kürze halber werden die im jeden Schritt emittierten Elektron und Antineutrino nicht geschrieben):



alternativ zerfällt  $^{140}\text{I}$  in einen angeregten Zustand von  $^{140}\text{Xe}$ , der dann — instantan nach dem  $\beta^-$ -Zerfall, jedoch verzögert im Bezug zum Spaltprozess — ein Neutron emittiert; danach geht das Tochternuklid  $^{139}\text{Xe}$  nach 3  $\beta^-$ -Zerfällen in  $^{139}\text{La}$  über:



Insgesamt werden nach dem Spaltprozess (IV.1) zwei prompte Neutronen emittiert, und dazu entweder 6 Paare ( $e^-, \bar{\nu}_e$ ), oder nur 5 Paare ( $e^-, \bar{\nu}_e$ ) mit einem verzögerten Neutron. Berücksichtigt man die verschiedenen Spaltkanäle mit den zugehörigen Verzweungsverhältnissen, so werden im Schnitt etwa 2,5 prompte und 0,04 verzögerte Neutronen emittiert.

**Bemerkung:** In fast jedem Schritt kann neben der  $\beta^-$ -Strahlung noch  $\gamma$ -Strahlung emittiert werden, wenn ein Zerfall nicht zum Grundzustand, sondern zu einem angeregten Zustand des Tochterkerns führt.

#### Energiebilanz

Primäre Spaltung: ca. 200 MeV freigesetzt.

- etwa 10 MeV werden durch Antineutrinos getragen und entweichen somit dem System;
- etwa 15 MeV werden verzögert emittiert (Elektronen und Photonen aus  $\beta^-$ -Zerfällen).

⇒ technisch sind ca. 190 MeV pro Spaltung „nutzbar“.

## IV.2 Kettenreaktion

### IV.2.1 Grundlagen

In einem Spaltungsereignis entstehen  $\nu > 1$  Neutronen je gespaltenem Kern. Jedes dieser Neutronen kann mit Spaltwahrscheinlichkeit  $q$  zu einer weiteren Spaltung führen. Für  $\nu q \geq 1$  ergibt sich eine *Kettenreaktion*.

Sei  $t_{\text{Zyklus}}$  die mittlere Zeitdauer eines Spaltzyklus, d.h. die durchschnittliche Zeit zwischen dem Entstehen von Neutronen in einem Spaltungsereignis und deren Verschwinden — indem sie entweder weitere Spaltungen induzieren, oder „verloren“ werden (s. unten). Je ursprünglich emittiertem Neutron entstehen in dieser Zykluszeit einerseits  $\nu q$  neue Neutronen, während andererseits ein Neutron zerstört wird. Wenn  $n_n(t)$  die Neutronendichte — Anzahl der Neutronen pro Volumeneinheit — im Spaltmaterial zur Zeit  $t$  bezeichnet, dann gilt für nicht zu großes  $\delta t$  die Bilanzgleichung

$$n_n(t + \delta t) = n_n(t) + (\nu q - 1)n_n(t) \frac{\delta t}{t_{\text{Zyklus}}}. \quad (\text{IV.2})$$

Im Limes  $\delta t \rightarrow 0$  ergibt sich dann die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dn_n(t)}{dt} = \frac{\nu q - 1}{t_{\text{Zyklus}}} n_n(t), \quad (\text{IV.3})$$

die sich sofort als

$$n_n(t) = n_n(t_0) e^{(\nu q - 1)(t - t_0)/t_{\text{Zyklus}}} \quad (\text{IV.4})$$

lösen lässt.

Für  $\nu q > 1$  wächst die Neutronendichte exponentiell, entsprechend einer exponentiellen Zunahme der Anzahl der Spaltungen im System, das als *überkritisch* bezeichnet wird. Wegen der in jedem Spalteneignis freigesetzten Energie, die sich in kinetische Energie der Fragmente umwandelt, wird das System explodieren.

Dagegen nimmt in einem *unterkritischen* System mit  $\nu q < 1$  die Neutronendichte bzw. die Anzahl der Spaltungen exponentiell ab, während sie in einem *kritischen* System mit  $\nu q = 1$  — was aber nur eine mathematische Idealisierung sein kann — konstant bleiben.

kritisches System  $\Rightarrow$  kritischer Radius

Wie groß ist  $q$ ?

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutron in einer Streuung an einem spaltbaren Kern eine Spaltung induziert, ist  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}}$ : hängt von der kinetischen Energie des Neutrons ab.

Dieses Verhältnis stellt die Größenordnung für  $q$  dar: mit  $E_{n_{\text{kin}}} = 2$  MeV (typisch für ein nach einer Spaltung emittiertes Neutron), für  $^{235}\text{U}$ ,  $q_{235} \approx 0,18$ ; für  $^{238}\text{U}$ ,  $q_{238} \approx 0,05$ .

Wenn die erste Streuung eines Neutrons nicht zu einer Spaltung führt, zwei Möglichkeiten: 1. Neutron wurde eingefangen [( $n, \gamma$ )-Prozess]: dann kann es keine weitere Spaltung induzieren! 2. Neutron hat inelastisch gestreut, d.h. hat eine geringere kinetische Energie nach der Streuung; dann hat es eine weitere Chance, eine Spaltung im nächsten Streuprozess zu induzieren, jetzt mit meistens einer unterschiedlichen Wahrscheinlichkeit  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}}$ . Z.B. ist  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}} = 0,84$  für thermische Neutronen an  $^{235}\text{U}$ .

Dazu sollen noch, in realistischen, nicht unendlich großen Systemen, geometrische (Oberflächen-) Verluste berücksichtigt werden: Neutronen entkommen dem System.

Anzahl von Streuungen bis zur Spaltung

Vereinfachtes Modell: Neutron kann entweder eine Spaltung induzieren, oder elastisch gestreut werden. Somit bleibt  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}} \equiv p$  konstant.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spaltung im  $k$ -ten Stoß stattfindet, ist  $p(1-p)^{k-1}$ , wobei der Faktor  $(1-p)^{k-1}$  der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die  $k-1$  ersten Streuungen keine Spaltung induziert haben. Dann ist die mittlere Anzahl von Streuungen bis zur Spaltung

$$\langle N_{\text{Str.}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

Dementsprechend ist die durchschnittliche Zeit  $t_{\text{diff}}$  bis zum Verschwinden des Neutrons gleich  $1/p$  mal der mittleren Zeit zwischen zwei Streuungen.

Die Flugbahn des Neutrons im Spaltmaterial ist eine Zufallsbewegung (Brownsche Bewegung): dessen Abstand von dem Ausgangspunkt nach  $n$  Schritten ist  $\sqrt{n}$  mal der mittleren freien Weglänge  $\ell_{\text{mfp}}$ . Somit ist die mittlere Diffusionslänge eines Neutrons im System  $\ell_{\text{diff}} \simeq \sqrt{\langle N_{\text{Str.}} \rangle} \ell_{\text{mfp}}$ . Für  $^{235}\text{U}$ , mit  $p \approx q_{235} \approx 0,18$ ,  $\langle N_{\text{Str.}} \rangle \approx 5,5$ ,  $\ell_{\text{diff}} \approx 7 \text{ cm}$ ,  $t_{\text{diff}} \approx 10^{-8} \text{ s}$ .

## IV.2.2 Kernenergie

### IV.2.2 a Wie läßt sich eine Kettenreaktion kontrollieren?

- Einerseits muss  $\nu q > 1$  sein, um eine Kettenreaktion überhaupt zu ermöglichen.  
 - Andererseits hat man für  $\nu q - 1 = \mathcal{O}(1)$  ein exponentielles Wachstum mit der „prompten“ Zeitskala  $t_{\text{Zyklus}} \approx 10^{-8} \text{ s}$  (für schnelle Neutronen mit  $E_{n_{\text{kin}}} \simeq 2 \text{ MeV}$ ) –  $10^{-3} \text{ s}$  (für thermische Neutronen). Technisch sind solche Zeitskalen kleiner als eine Millisekunde nicht beherrschbar.

Lösung: verzögerte Neutronen! Im Mittel werden sie nach  $t_{\text{verz.}} \simeq 20 \text{ s}$  emittiert.

Idee: wähle Reaktordesign so, dass

$$\nu_{\text{pr.}} q < 1 \quad (\text{IV.5})$$

und ermögliche die Kettenreaktion mit Hilfe der verzögerten Neutronen, d.h.

$$(\nu_{\text{pr.}} + \nu_{\text{verz.}}) q > 1. \quad (\text{IV.6})$$

Somit ergibt sich eine neue Zeitskala der Ordnung 0,1–1 s.

### IV.2.2 b Wahl des Spaltmaterials

salopp: „Brennstoff“ (darf aber nicht brennen!!!)

Im natürlichen Uran ist der  $^{235}\text{U}$ -Anteil  $C = 0,72\%$ . Für  $E_{n_{\text{kin}}} \simeq 2 \text{ MeV}$ , Spaltung mit Wahrscheinlichkeit  $q \approx Cq_{235} + (1-C)q_{238} \approx q_{238} \approx 0,05$ . Inelastische Stöße führen jedoch schnell zu  $E_{n_{\text{kin}}} < 1,4 \text{ MeV}$ , d.h. unterhalb der Schwelle für  $^{238}\text{U}$ : Spaltwahrscheinlichkeit nimmt schnell ab, denn die Neutronen werden durch  $^{238}\text{U}$  absorbiert (Neutroneneinfang), bevor sie eine neue Spaltung mit  $^{235}\text{U}$  induzieren können.

⇒ zwei Möglichkeiten:

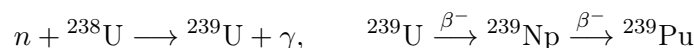
- Hohe Anreicherung (20% oder mehr) an  $^{235}\text{U}$ . Dann sind schnelle Neutronen nutzbar ⇒ „schnelle Reaktoren“
- Thermische Reaktoren: Neutronen werden durch *Moderation* — mithilfe eines leichten (für die Kinematik), neutronenreichen (damit der Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang niedrig sei) Material:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$ ,  $\text{BeO}$ ,  $\text{C}$  (Graphit) — in vielen Stößen auf thermische Energie ( $E_{n_{\text{kin}}} \simeq 0,025 \text{ eV}$ ) abgebremst, um den großen Wirkungsquerschnitt von  $^{235}\text{U}$  bei solchen Energien zu Nutzen zu machen.

Moderation muss schnell stattfinden, um die Absorptionsverluste durch Uran zu minimieren. Um eine stabile Kettenreaktion zu erhalten ist nur eine geringe Anreicherung an  $^{235}\text{U}$  (2–3%) nötig.

Andere mögliche Spaltmaterialien (entsprechende Reaktoren erfordern eine hohe Anreicherung):

- Plutonium  $^{239}\text{Pu}$  ( $T_{1/2} = 24110 \text{ Jahre}$ )

⇒ muss zunächst produziert werden (findet in jedem Kernreaktor statt!):



wobei  $T_{1/2}(^{239}\text{U}) = 23 \text{ s}$ ,  $T_{1/2}(^{239}\text{Np}) = 2,35 \text{ Tage}$ .  
 -  $^{233}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 1,59 \cdot 10^5 \text{ Jahre}$ )  
 $\Rightarrow$  wird produziert über



wobei  $T_{1/2}(^{233}\text{Th}) = 22 \text{ min}$ ,  $T_{1/2}(^{233}\text{Pa}) = 27 \text{ Tage}$ .

### IV.2.2 c Regelung des Reaktors

Variable Absorption von Neutronen durch einen *Absorber*: mechanisch bewegliche Stäbe aus einem Material mit großem Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang:  $^{113}_{48}\text{Cd}_{65}$ ,  $^{155}_{64}\text{Gd}_{91}$ ,  $^{10}_{5}\text{B}_5$ .

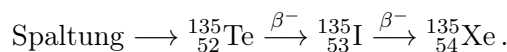
Mit steigender Temperatur  $T$  im Reaktor nimmt die thermische Bewegung der Uran-Kerne zu, was effektiv zu einer Verbreiterung der Resonanzlinien für Neutroneneinfang führt. Somit nimmt die Absorption von Neutronen automatisch zu, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron eine neue Spaltung induziert, wird geringer:  $dq/dT < 0$ . Dies ist wesentlich für die Sicherheit des Reaktors.

**Bemerkung:** In einem Reaktor befinden sich auch viele Photonen, Elektronen und Positronen, und  $\alpha$ -Teilchen — die aus den Zerfällen der Spaltprodukte stammen —, sowie Protonen (insbesondere in  $\text{H}_2\text{O}$ -moderierten Reaktoren, denn die Neutronen zerbrechen leicht die Wassermoleküle). Zum Glück induzieren diese Teilchen selbst keine weitere Spaltung, oder nur in vernachlässigbarer Menge: Positronen, Protonen und  $\alpha$ -Teilchen sind positiv geladen und damit abgestoßen durch die Kerne; die Elektronen und Photonen haben eine zu geringe kinetische Energie, um eine Spaltung zu induzieren. Somit kann man sich nur um die Neutronenbilanz kümmern.

### IV.2.2 d Vergiftung des Reaktors

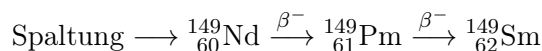
Normalerweise bleiben die Spaltprodukte im Reaktor, was sich als schlecht für die Neutronenbilanz herausstellt. Insbesondere können sich stabile oder langlebige Kerne mit hohem Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang anhäufen. Solche Nuklide werden als zusätzliche Absorber fungieren, entsprechend einer *Vergiftung des Reaktors*, und müssen somit sorgfältig berücksichtigt werden. Beispiele davon sind:

- $^{135}_{54}\text{Xe}$  (mit Neutroneneinfangsquerschnitt<sup>(63)</sup>  $\sigma_{(n,\gamma)} = 2,65 \cdot 10^6 \text{ b}$ ): wird entweder direkt in der Spaltung erzeugt (mit Wirkungsgrad  $\gamma = 0,001$ ) oder indirekt ( $\gamma = 0,064$ ) über



$^{135}_{54}\text{Xe}$  kann dann entweder Neutronen einfangen (was zum stabilen  $^{136}_{54}\text{Xe}$  führt), oder mit Halbwertszeit  $T_{1/2} = 9,17 \text{ Stunden}$  über  $\beta^-$ -Emission in  $^{135}_{55}\text{Cs}$  und dann  $^{135}_{56}\text{Ba}$  zerfallen.

- $^{149}_{62}\text{Sm}$  (mit Neutroneneinfangsquerschnitt<sup>(63)</sup>  $\sigma_{(n,\gamma)} = 4,1 \cdot 10^4 \text{ b}$ ): wird über



mit Wirkungsgrad  $\gamma = 0,01$  erzeugt.  $^{149}_{62}\text{Sm}$  ist gegenüber Zerfall stabil, kann also nur über Neutroneneinfang zerstört werden — was aber genau die Vergiftung des Reaktors darstellt.

Betrachte man z.B. ein Nuklid  $i$ ; es kann

- (primäres) Spaltprodukt sein, mit Wirkungsgrad  $\gamma_i$ ;
- Produkt des Zerfalls eines Nuklids  $j$  sein, mit Zerfallskonstante  $\lambda_{j \rightarrow i}$ ;
- Produkt des Neutroneneinfangs durch ein Nuklid  $k$ , mit Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{k,n}$ ;

<sup>(63)</sup>Dieser Wert sollte mit dem „interessanter“ Spaltquerschnitt von  $^{235}\text{U}$  mit thermischen Neutronen  $\sigma_{\text{Sp.}} = 582 \text{ b}$  verglichen werden.

- zerfallen, mit Zerfallskonstante  $\lambda_i$ ; <sup>(64)</sup>
- Neutronen einfangen, mit Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{i,n}$ .

Somit genügt die Dichte  $n_i(t)$  der Nuklide vom Typ  $i$  der Gleichung

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \gamma_i n_{\text{Sp.-K.}}(t) \sigma_{\text{Sp.}} \Phi_n(t) + \lambda_{j \rightarrow i} n_j(t) + n_k(t) \sigma_{k,n} \Phi(t) - \lambda_i n_i(t) - n_i(t) \sigma_{i,n} \Phi_n(t), \quad (\text{IV.7})$$

mit  $n_{\text{Sp.-K.}}$  der Dichte der Spaltkerne und  $\Phi_n$  dem mittleren Neutronenfluss, d.h. der durchschnittlichen Anzahl von Neutronen, die pro Zeiteinheit eine Einheitsfläche durchqueren.

### IV.2.3 Reaktortypen

(Druckwasserreaktor, Siedewasserreaktor, Hochtemperaturreaktor, schneller Brüter)

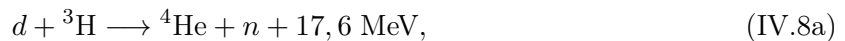
→ werden ein andermal diskutiert!

## IV.3 Kernfusion

Da die Bindungsenergie pro Nukleon der leichtesten Nuklide kleiner als diejenige von schwereren Kernen ist, kann prinzipiell Energie durch Kernverschmelzung, auch *Fusion* genannt, gewonnen werden. Wegen ihrer positiven elektrischen Ladung stoßen sich die Kerne jedoch ab, entsprechend einer Coulomb-Potentialbarriere, proportional zum Produkt  $Z_1 Z_2$  der Ladungszahl der zu fusionierenden Kerne. Daher ist Kernfusion leichter mit den ganz leichten Kernen.

Zum Überwinden der Coulomb-Barriere müssen die Kerne eine hohe kinetische Energie haben, für leichte Atomkerne  $E_{\text{kin}} \gtrsim 1$  keV. Somit bilden die Atome ein heißes „Gas“ mit Temperatur  $T \gtrsim 10^7$  K: bei dieser Temperatur sind die Atome ganz ionisiert, so dass sie eher ein (elektromagnetisches) *Plasma* bilden.

Die Bindungsenergie hat ausgeprägte Spitzen — lokale Maxima — bei  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ : Fusionsprozesse, die solche Kerne erzeugen, sind somit besonders exothermisch. Beispiele solcher Prozesse sind



Dabei wird die angegebene freigesetzte Energie jeweils durch die zwei Endprodukte als kinetische Energie mitgenommen.

Dagegen sind Prozesse, die zu anderen Nukliden führen, weniger exothermisch, wie es z.B. der Fall der sonst günstigen — da die teilnehmenden Kerne die leichtesten sind — Reaktionen



wobei der erstere Prozess, der die  $\beta^+$ -Umwandlung eines Protons in ein Neutron erfordert, über die schwache Wechselwirkung vermittelt wird.

Neben der hohen Temperatur benötigt man auch ein Plasma mit einer hohen genug Teilchendichte  $n$ , damit die zu fusionierenden Kerne sich oft genug treffen, d.h. um die Reaktionsrate zu erhöhen. Somit definiert man das *Fusionsprodukt*  $nT\tau$ , mit  $\tau$  der *Energieeinschlusszeit* — Zeitdauer, während deren die hohe Energiedichte erreicht wird. Um ein Plasma dauerhaft zu entzünden soll dieses Produkt eine Schwelle von etwa  $3 \cdot 10^{27} \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$  überschreiten — wobei heutige Experimente Werte von ca.  $10^{27} \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$  erreicht haben.

Solche Werte lassen sich erreichen

<sup>(64)</sup>oder allgemeiner, zerstört werden, durch einen anderen Prozess als Neutroneneinfang.

- in der Sonne (und allgemeiner in noch „lebenden“ Sternen), vgl. Kap. Nukleare Astrophysik;
- auf der Erde (hoffentlich...): 2 aktiv untersuchte Möglichkeiten, mit Deuterium–Tritium-Gemisch, entsprechend dem Prozess (IV.8a):
  - „Plasmafusion“: soll in durch elektromagnetische Felder aufgeheizten und gleichzeitig räumlich eingeschlossenen Plasmen stattfinden.  
Schon viele Experimente seit 40 Jahren (die letztere und bisher erfolgreichste: JET in Culham, UK).  
Nächste große Schritte: ITER (Typ Tokamak, in Cadarache, Frankreich) & Wendelstein 7-X (Typ Stellarator, in Greifswald).
  - „Trägheitsfusion“ (oder „Laser-Fusion“): kleine Kugelchen von  $d$ - $^3\text{H}$ -Gemisch werden durch Laserstrahlen stark und schnell komprimiert; somit wird eine sehr hohe Energiedichte erreicht, bevor das Gemisch Zeit hat, zu expandieren.  
Aktuelle Experimente am NIF (National Ignition Facility, Lawrence Livermore Laboratory, Kalifornien) und (bald) am Laser Mégajoule (Bordeaux, Frankreich).

Wirtschaftlich ist das Plasmaproduct nicht der einzige Faktor, man muss auch im ganzen Fusionsprozess — einschließlich des angewendeten Stroms, um das Plasma zu erhitzen — Energie gewinnen. Daher soll man den wie folgt definierten *Leistungsverstärkungsfaktor*  $Q$

$$Q \equiv \frac{\text{erzeugte Fusionsleistung}}{\text{aufgewendete Heizleistung}} \quad (\text{IV.10})$$

berücksichtigen. In JET wurden Werte  $Q \simeq 0,65$  erreicht, Ziel für ITER ist  $Q \simeq 10$  — die Wärme des Plasmas muss noch wieder in Strom umgewandelt werden, was automatisch mit einem nicht so hohen Wirkungsgrad einhergeht, weshalb  $Q$  erheblich größer als 1 sein sollte.

Vorteile der Energieproduktion durch Kernfusion sind

- die Existenz vom Brennstoff in praktisch unbegrenzter Menge.  
Es gibt 40 mg Deuterium je Liter Meerwasser, und das erforderliche Tritium könnte direkt im Fusionsreaktor erbrütet werden, über die Reaktion  $n + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H} + 4,56 \text{ MeV}$ , wobei die Neutronen Produkte vom Spaltprozess (IV.8a) sind.
- Der Reaktor lässt sich ohne Gefahr schnell abschalten, ohne wegfallende Nachwärme hinterzulassen.
- Keine radioaktive Endprodukte werden erzeugt.  
Na, mal sehen: es wird doch mehr als ein paar Neutronen — die durch elektromagnetische Felder nicht eingeschlossen werden — überall fliegen, die mit den Materialien in deren Umgebung wechselwirken werden: hier sind Absorber nötig (vgl. Kernspaltung), und die technischen Lösungen sind noch zu entwickeln. Daher soll nach ITER noch ein DEMO-Experiment kommen.



# Literaturverzeichnis

- [1] J.-L. Basdevant, J. Rich, M. Spiro, *Fundamentals in nuclear physics*, 1. Aufl. (Springer, New York, 2005).
- [2] K. Bethge, G. Walter, B. Wiedemann, *Kernphysik*, 3. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2008).
- [3] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *An introduction to Nuclear Physics*, 2. Aufl. (University Press, Cambridge, 2001).
- [4] H. Friedmann, *Einführung in die Kernphysik*, 1. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2014).
- [5] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 6. Aufl. (Teubner, Stuttgart, 1994).
- [6] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*, 8. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2009).
- [7] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil I* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1972).
- [8] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil II* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1973).
- [9] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil III* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1973).
- [10] W. T. Hering, *Angewandte Kernphysik*, 1. Aufl. (Teubner, Stuttgart, 1999).
- [11] W. Heisenberg, *Die Physik der Atomkerne* (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1949).
- [12] H. Geiger, E. Marsden, *Phil. Mag. (Ser. 6)* **25** (1913) 604–623.
- [13] E. Rutherford, *Phil. Mag. (Ser. 6)* **21** (1911) 669–688.
- [14] N. S. Wall, J. R. Rees, K. W. Ford, *Phys. Rev.* **97** (1955) 726–732.
- [15] R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** (1957) 231–316.
- [16] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries, *Atom. Data Nucl. Data Tabl.* **36** (1987) 495–536.
- [17] C. J. Batty, E. Friedman, H. J. Gils, H. Rebel, *Adv. Nucl. Phys.* **19** (1989) 1–188.
- [18] S. Abrahamyan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 112502 [[arXiv:1201.2568 \[nucl-ex\]](#)].
- [19] C. Tarbert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 242502 [[arXiv:1311.0168 \[nucl-ex\]](#)].
- [20] B. Jonson, A. Richter, *Phys. Bl.* **54** (1998) 1121–1125.
- [21] H. Haken, H. C. Wolf, *Atom- und Quantenphysik*, 7. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2000).
- [22] D. Lunney, J. M. Pearson, C. Thibault, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 1021–1082.

- [23] S. George *et al.*, *Physik in unserer Zeit* **36** (2007) 163–164.
- [24] G. Audi *et al.*, *Chin. Phys. C* **36** (2012) 1157–1286.
- [25] E. Majorana, *Z. Phys.* **82** (1933) 137–145.
- [26] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **77** (1932) 1–11.
- [27] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3. Aufl. (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [28] Particle Data Group Collaboration [K. A. Olive *et al.*], *Chin. Phys. C* **38** (2014) 090001 [vgl. <http://www-pdg.lbl.gov/>].
- [29] J. S. Nico *et al.*, *Nature* **444** (2006) 1059–1062.
- [30] E. Fermi, *Nuclear physics*, 2. Aufl. (University of Chicago Press, Chicago, 1950).
- [31] C. F. v. Weizsäcker, *Z. Phys.* **96** (1935) 431–458.
- [32] H. A. Bethe, R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8** (1936) 82–229.
- [33] N. Gauthier, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 344–346.
- [34] A. Wapstra, N. Gove, *Nucl. Data Tables A* **9** (1971) 265–468.
- [35] J. Mattauch, *Z. Phys.* **91** (1934) 361–371.
- [36] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik IV. Statistische Physik*, 5. Aufl. (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2010).
- [37] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik. Band 4: Spezielle Relativitätstheorie. Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2005).
- [38] Jefferson Lab CLAS Collaboration [O. Hen *et al.*], *Science* **346** (2014) 614–617.
- [39] K. Lodders, *Astrophys. J.* **591** (2003) 1220–1247.
- [40] N. J. Stone, *Atom. Data Nucl. Data Tabl.* **90** (2005) 75–176.
- [41] T. Otsuka, T. Suzuki, J. D. Holt, A. Schwenk, Y. Akaishi, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 032501 [arXiv:0908.2607 [nucl-th]].
- [42] J. D. Holt, T. Otsuka, A. Schwenk, T. Suzuki, *J. Phys. G* **39** (2012) 085111 [arXiv:1009.5984 [nucl-th]].
- [43] K. Heyde, *Basic ideas and concepts in nuclear physics*, 1. Aufl. (Institute of Physics Publishing, Bristol & Philadelphia, 1994).
- [44] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik III. Quantenmechanik*, 5. Aufl. (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008).
- [45] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 9. Aufl. (Dover, New York, 1970).
- [46] F. W. J. Olver *et al.*, *NIST Handbook of mathematical functions* (University Press, Cambridge, 2010), [vgl. <http://dlmf.nist.gov/>].
- [47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantenmechanik, Band 1*, 3. Aufl. (de Gruyter, Berlin, 2007).

- 
- [48] A. Messiah, *Quantenmechanik, Band 1*, 2. Aufl. (De Gruyter, Berlin, 1991).
- [49] M. Goeppert Mayer, Phys. Rev. **75** (1949) 1969–1970.
- [50] M. Goeppert Mayer, Phys. Rev. **78** (1950) 16–21.
- [51] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, Phys. Rev. **75** (1949) 1766.
- [52] E. Landau, L.D und Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band IV: Quantenelektrodynamik*, 7. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991).
- [53] S. Hofmann, Physik Journal **4** (2005) Nr. 5 37–43.
- [54] N. D. Cook, *Models of the atomic nucleus*, 1. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2006).
- [55] P. de Marcillac *et al.*, Nature **422** (2003) 876–878.
- [56] G. W. Wetherill, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **25** (1975) 283–328.
- [57] W. F. Libby, Phys. Rev. **69** (1946) 671–672.
- [58] S. Kaufman, W. F. Libby, Phys. Rev. **93** (1954) 1337–1344.
- [59] H. Geiger, J. Nuttall, Phil. Mag. Ser. 6 **22** (1911) 613–621.
- [60] G. Gamow, Z. Phys. **51** (1928) 204–212.
- [61] C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, R. Hudson, Phys. Rev. **105** (1957) 1413–1414.
- [62] R. L. Mössbauer, Zeit. Phys. **151** (1958) 124–143.
- [63] M. Pfützner *et al.*, Eur. Phys. J. A **14** (2002) 279–285.
- [64] J. Giovinazzo *et al.*, .
- [65] A. Spyrou *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 102501.
- [66] M. Goeppert Mayer, Phys. Rev. **48** (1935) 512–516.
- [67] M. Agostini *et al.*, (2015) [arXiv:1501.02345 [nucl-ex]].
- [68] EXO-200 Collaboration [J. Albert *et al.*], Phys. Rev. C **89** (2014) 015502 [arXiv:1306.6106 [nucl-ex]].
- [69] A. P. Meshik, C. M. Hohenberg, O. V. Pravdivtseva, Y. S. Kapusta, Phys. Rev. C **64** (2001) 035205.
- [70] Y. M. Gavriluk *et al.*, Phys. Rev. C **87** (2013) 035501.
- [71] B. Pritychenko, Nucl. Data Sheets **120** (2014) 102–105.
- [72] GERDA Collaboration [M. Agostini *et al.*], Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 122503 [arXiv:1307.4720 [nucl-ex]].
- [73] KamLAND-Zen Collaboration [A. Gando *et al.*], Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 062502 [arXiv:1211.3863 [hep-ex]].
- [74] H. J. Rose, G. A. Jones, Nature **307** (1984) 245–247.
- [75] N. Bohr, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **56** (1939) 426–450.