

III.3.2 d Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit

Bei der Emission eines α -Teilchens durch einen Mutterkern handelt es sich um einen rein quantenmechanischen Effekt — eigentlich erfolgt der Zerfall durch *Tunneleffekt* —, dessen Wahrscheinlichkeit sich bis auf einigen Faktoren relativ einfach berechnen lässt. Daraus kann man dann die Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit des Mutterkerns abschätzen, und dabei die Geiger–Nuttall-Regel wiederfinden.

Historisch wurde diese Berechnung durch Gamow [60] kurz nach der Formulierung der Quantenmechanik durchgeführt: dies zeigte insbesondere, dass die (damals) neue Mechanik nicht nur in der Atomphysik bei Längenskalen von 0,1–10 nm gilt, sondern auch in der Kernphysik bei viel kleineren Skalen.

Modellierung des Problems

Wir betrachten den Zerfall eines Mutterkerns mit Ladungszahl Z in einen Tochterkern — Masse M_T , Ladungszahl $Z - 2$ — und ein α -Teilchen. Sei ε_α die totale Energie des α -Teilchens, abgesehen von dessen Massenenergie.

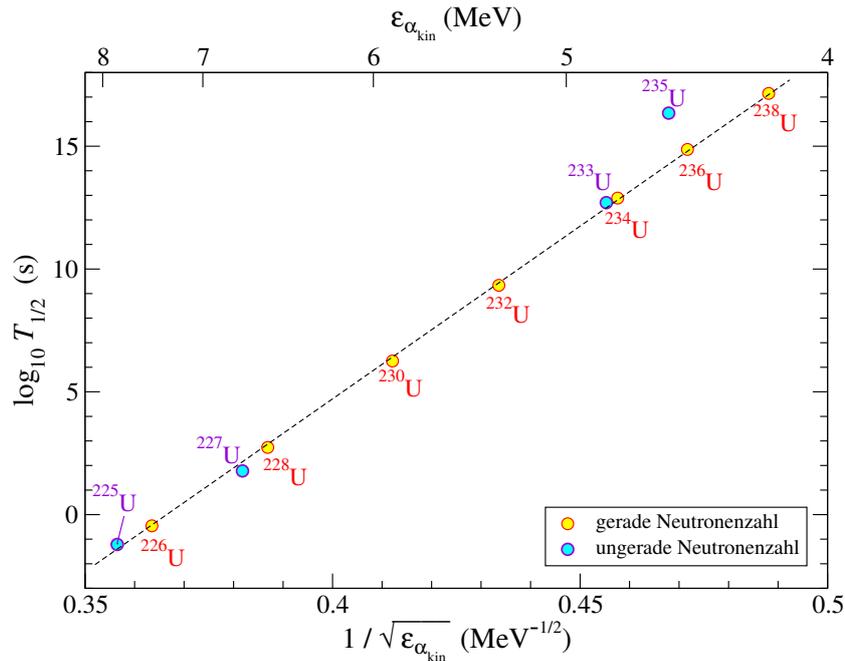


Abbildung III.7 – Geiger–Nuttall’sche Beziehung zwischen $T_{1/2}$ und $\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$ für die Uran-Isotope. Daten aus <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>.

- Im Anfangszustand bilden 2 Protonen und 2 Neutronen des Mutterkerns ein α -Teilchen.

Dabei hilft die besonders hohe Bindungsenergie pro Nukleon des ${}^4_2\text{He}$ -Kerns (s. Nebenbild in Abb. I.10), entsprechend einer starker Zusammenbindung der zwei Protonen und zwei Neutronen. Dafür müssen sich die vier Nukleonen zusammen in einem kleinem Bereich in Orts- (Größe der Ordnung des ${}^4_2\text{He}$ -Kernradius) und Impulsraum befinden: zur genauen Beschreibung dieses Stadiums ist daher ein detailliertes Modell des Kerns nötig, das solche 4-Teilchen-Effekte berücksichtigt!

Dieses α -Teilchen ist in einem Potentialtopf $V_\alpha(\vec{r})$ eingeschlossen, der durch den Rest des Mutterkerns verursacht wird. Wie im Fall der in Abschn. II.4 eingeführten Potentialtöpfe handelt es sich dabei um ein mittleres effektives Potential, das die Wirkung aller $A-4$ anderen Nukleonen des Kerns auf das α -Teilchen beschreiben soll.⁽⁴⁸⁾ Der Einfachheit halber wird hiernach ein kugelsymmetrisches Kastenpotential mit der Tiefe $-V_0^{(\alpha)}$ angenommen.

- Nach dem Zerfall befindet sich das α -Teilchen außerhalb des Mutterkerns: es spürt das durch den Tochterkern erzeugte abstoßende Coulomb-Potential und wird deshalb beschleunigt, bis es die durch Gl. (III.18) gegebene “endgültige” kinetische Energie $\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$ hat, die gleich dessen totalen Energie ε_α ist.

Genauer wird das α -Teilchen beschleunigt, so lange das Kernpotential spürbar ist, d.h. so lange dieses Potential noch nicht durch die Elektronen des „Mutter“-Atoms abgeschirmt ist. Wenn das α -Teilchen außerhalb der Elektronenhülle ist, wird es nicht mehr beschleunigt. Stattdessen wird es eher abgebremst, denn es fängt an, andere Atome zu treffen, vgl. Kap. **Strahlung in Materie**. Daher bezeichnet die „kinetische Energie im Endzustand“ $\varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}$ die Energie am Ende der Beschleunigungsphase, vor dem Anfang des Energieverlusts über Stöße mit anderen Atomen.

Unter der Annahme, dass die Reichweite R des Kastenpotentialtopfs V_α , entsprechend etwa dem Kernradius, sich im Zerfall nicht ändert, lautet das durch das α -Teilchen gespürte Potential

⁽⁴⁸⁾Dieses Potential V_α unterscheidet sich vom Potential V_p bzw. V_n , das ein Proton bzw. Neutron spürt.

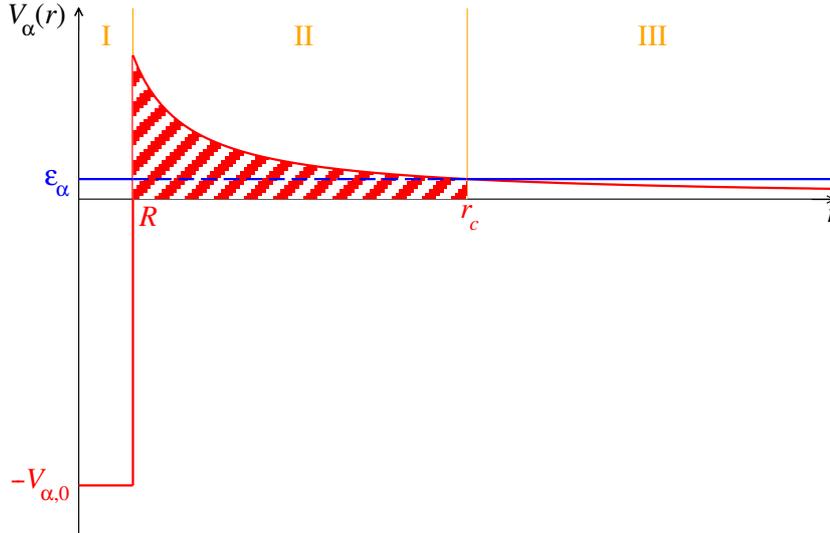


Abbildung III.8 – Vereinfachter Verlauf des effektiven Potentials für die Modellierung des α -Zerfalls.

$$V_{\alpha}(r) = \begin{cases} -V_{\alpha,0} & \text{für } r < R, \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R. \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Ein solches Potential wird in Abb. [III.8](#) dargestellt. Die Größenordnung des maximalen Werts der potentiellen Energie bei $r = R$ lässt sich einfach abschätzen: mit $Z \simeq 60$ und $R \simeq 5$ fm kommt $V_{\alpha}(R) \approx 35$ MeV, erheblich größer als die totale Energie $\epsilon_{\alpha} \approx 3\text{--}8$ MeV. Daher treten drei Gebiete auf:

- für $r < R$ (Gebiet I) oder $r \geq r_c$ (Gebiet III) mit r_c dem klassischen Umkehrpunkt, definiert durch

$$V_{\alpha}(r_c) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c} = \epsilon_{\alpha\text{kin}} \quad \text{d.h.} \quad r_c = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{\alpha\text{kin}}}, \quad (\text{III.22})$$

ist die potentielle Energie kleiner als ϵ_{α} : daher besitzt das α -Teilchen dort eine positive kinetische Energie, d.h. klassisch darf es in diesen Bereichen lokalisiert werden.

- für $R \leq r < r_c$ (Gebiet II) ist die potentielle Energie des α -Teilchens größer als dessen totale Energie, d.h. das Teilchen hat in diesem Bereich keine wohldefinierte kinetische Energie und darf sich daher klassisch dort nicht befinden.

Klassisch ist das Kommen des α -Teilchens aus dem Kern, vom Gebiet I zum Gebiet III, ohne Anregung unmöglich. Somit beruht der Zerfall auf dem quantenmechanischen *Tunneleffekt*, und die Zerfallswahrscheinlichkeit entspricht der Tunnelwahrscheinlichkeit. Die Letztere ergibt sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein α -Teilchen im Potentialtopf [\(III.21\)](#)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} \Delta \psi_{\alpha}(\vec{r}) + V_{\alpha}(\vec{r}) \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \epsilon_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}). \quad (\text{III.23a})$$

Entsprechend der sphärischen Symmetrie des angenommenen effektiven Potentials [\(III.21\)](#) kann man für die Wellenfunktion den üblichen Separationsansatz $\psi_{\alpha}(\vec{r}) = R_{\alpha}(r) Y_{\ell m_{\ell}}(\theta, \varphi)$ machen, wobei der radiale Anteil $R_{\alpha}(r)$ im Prinzip auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl abhängt, obwohl dies hier nicht explizit geschrieben wird. Mit diesem Ansatz führt Gl. [\(III.23a\)](#) zur Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\alpha}(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{\alpha}(r) \right] + V_{\alpha}(r) R_{\alpha}(r) = \epsilon_{\alpha} R_{\alpha}(r). \quad (\text{III.23b})$$

Tunnelwahrscheinlichkeit, Gamow-Faktor

Betrachte man zunächst den Fall $\ell = 0$, so dass der zweite Term in den eckigen Klammern in Gl. (III.23b) verschwindet. Trotz dieser Vereinfachung bleibt die Differentialgleichung wegen der komplizierten Form des Potentials V_α nicht exakt lösbar.

Anhand eines Näherungsverfahrens kann man doch eine annähernde Lösung finden.⁽⁴⁹⁾ Damit lässt sich die Tunnelwahrscheinlichkeit bestimmen, die durch das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei $r = r_c$ — d.h. am Rand des klassisch erlaubten Bereichs außerhalb des Kerns — und bei $r = R$ — entsprechend dem Rand des effektiven Potentials — gegeben ist:

$$\mathcal{P} \simeq \frac{4\pi r_c^2 |R_\alpha(r=r_c)|^2}{4\pi R^2 |R_\alpha(r=R)|^2}, \quad (\text{III.24})$$

wobei die Faktoren $4\pi r_c^2$ und $4\pi R^2$ die Flächen der Kugel $r = r_c$, $r = R$ sind. Dabei findet man, bis auf einem hier unwesentlichen Vorfaktor der Ordnung Eins⁽⁴⁹⁾

$$\mathcal{P} \simeq \exp \left[-2 \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V_\alpha(r') - \varepsilon_\alpha]} dr' \right] \equiv e^{-G}, \quad (\text{III.25})$$

mit G dem sogenannten *Gamow-Faktor*. Unter Verwendung von $V_\alpha(r') = V_\alpha(r_c) r_c/r' = \varepsilon_\alpha r_c/r'$, wobei die zweite Identität aus Gl. (III.22) kommt, ergibt sich

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m_\alpha \varepsilon_\alpha}{\hbar^2}} \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{r_c}{r'} - 1} dr' = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2 \varepsilon_\alpha}} \pi \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right), \quad (\text{III.26a})$$

mit

$$\mathcal{G}(x) \equiv \frac{2}{\pi} \left[\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right] \quad (\text{III.26b})$$

einer Funktion, die für $0 \leq x \leq 1$ Werte zwischen 0 und 1 annimmt, wie in Abb. III.9 gezeigt wird.

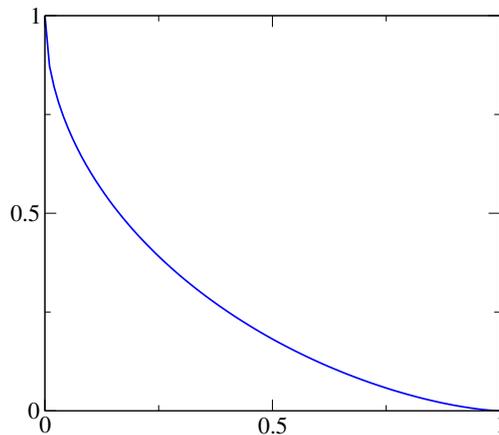


Abbildung III.9 – Verlauf der durch Gl. (III.26b) definierten Funktion $\mathcal{G}(x)$.

Energetisch ist der Zerfall für $Q_\alpha > 0$ möglich, insbesondere im Grenzfalle $Q_\alpha \rightarrow 0^+$. Im letzteren Limes, der auch $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0^+$ entspricht, geht der klassische Umkehrpunkt r_c nach $+\infty$, d.h. $R/r_c \rightarrow 0$ und dementsprechend $\mathcal{G}(R/r_c) \rightarrow 1$. Daher ist der Gamow-Faktor durch den Faktor $1/\varepsilon_\alpha$ kontrolliert, und zwar $G \rightarrow +\infty$, so dass die Tunnelwahrscheinlichkeit gegen Null geht. Dies erklärt, warum Zerfälle nur für Q_α -Faktoren mit einem minimalen Wert von etwa 2 MeV beobachtet werden.

⁽⁴⁹⁾Die Berechnung wird im Anhang III.A zu diesem Kapitel mehr detailliert.

Bemerkungen:

* Hier wurde die Tunnelwahrscheinlichkeit als das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten definiert, Gl. (III.24). Manchmal wird eher das Verhältnis der Teilchenflussdichten verwendet. Da die Teilchenflussdichte grob gesagt gleich dem Produkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit der Geschwindigkeit ist, unterscheidet sich diese alternative Definition von der hier benutzten nur um einen unwichtigen Vorfaktor zum Exponentialterm.

* Als Gamow-Faktor wird manchmal nicht G , definiert durch Gl. (III.26a), bezeichnet, sondern e^{-G} oder $G/2$.

* Der Gamow-Faktor (III.26a) lässt sich noch schreiben als

$$G = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{\epsilon_\alpha}} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right).$$

Dabei erkennt man einerseits die elektromagnetische Feinstrukturkonstante $\alpha_{\text{em}} \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$, andererseits das Verhältnis von der Massenenergie des α -Teilchens zu dessen kinetischen Energie. Somit kann man die Größenordnung des Gamow-Faktors schnell abschätzen.

Zerfallsrate, Halbwertszeit

Die Tunnelwahrscheinlichkeit $\mathcal{P} \simeq e^{-G}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für den „Sprung“ von $r = R$ nach $r = r_c$. Um die Zerfallsrate λ_α , d.h. die Anzahl dieser Sprünge pro Zeiteinheit, zu erhalten, muss man noch \mathcal{P} durch die Rate, mit der Teilchen sich bei $r = R$ befinden, multiplizieren. Eine grobe Abschätzung für diese Rate ist $v_{\text{in}}/2R$, mit v_{in} der Geschwindigkeit des α -Teilchens im Potentialtopf, entsprechend dem Kehrwert der Zeitdauer zur Durchquerung des Topfs:

$$\lambda_\alpha \simeq \frac{v_{\text{in}}}{2R} e^{-G}.$$

Für den Halbwertszeit des Mutterkerns ergibt sich somit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_\alpha} \simeq \frac{\ln 2}{v_{\text{in}}/2R} e^G,$$

d.h. $\ln T_{1/2} \simeq \ln(2R \ln 2 / v_{\text{in}}) + G$. Unter Betrachtung der $1/\epsilon_\alpha$ -Abhängigkeit des Gamow-Faktors findet man das Geiger-Nuttall-Gesetz (III.20)

$$\ln T_{1/2} = -a + \frac{b}{\sqrt{\epsilon_\alpha}}$$

wieder. Das Letztere ist somit ein starker Hinweis auf die Gültigkeit der Modellierung des α -Zerfalls als Tunnelprozess.

Fall $\ell \neq 0$

Wie früher schon diskutiert wurde, kann die Erhaltung des Drehimpulses im Zerfall dazu führen, dass das α -Teilchen mit einem nicht-verschwindenden Drehimpuls bezüglich des Tochterkerns emittiert wird, d.h. mit einer Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell \neq 0$.

In diesem Fall lässt sich der radiale Anteil (III.23b) der Schrödinger-Gleichung für das α -Teilchen noch als

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\alpha,\ell}(r)) + V_{\alpha,\text{eff}}(r) R_{\alpha,\ell}(r) = \epsilon_\alpha R_{\alpha,\ell}(r), \quad (\text{III.27a})$$

umschreiben, wobei

$$V_{\alpha,\text{eff}}(r) \equiv V_\alpha(r) + \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (\text{III.27b})$$

Dabei wird der Effekt des Bahndrehimpulses als eine Änderung des durch das α -Teilchen gespürten Potentials berücksichtigt. Somit sieht das Teilchen eine höhere Potentialbarriere, als wenn es

keinen bzw. einen kleineren Bahndrehimpuls hätte. Wiederum führt diese erhöhte (und breitere) Potentialbarriere zu einer kleineren Tunnelwahrscheinlichkeit bzw. einer längeren Halbwertszeit des Mutterkerns.

Anhang zum Kapitel III

III.A α -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit

Gleichung (III.23a) soll in den drei in Abb. III.8 definierten Gebieten I, II und III gelöst werden. Die Kontinuitätsbedingungen für die Wellenfunktion ψ_α und seine Ableitung $d\psi_\alpha/dr$ bei dem „klassischen Umkehrpunkt“ $r = r_c$ und bei $r = R$ erlauben dann das Zusammenkleben der in den drei Gebieten erhaltenen Wellenfunktionen.

$$u(r) \equiv r\psi_\alpha(r):$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_\alpha(r)]u(r) = 0 \quad (\text{III.58})$$

Der Ansatz $u(r) = e^{\Phi(r)}$ führt dann zur differentiellen Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[V_\alpha(r) - E] \equiv \frac{g(r)}{\hbar^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } R < r < r_c, \\ < 0 & \text{für } r < R \text{ oder } r > r_c. \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Die WKB-Methode (Wentzel, Kramers, Brillouin) liefert eine annähernde Lösung Φ solange in der linken Seite der Gleichung der erste Term vernachlässigbar bezüglich des zweiten Terms ist. Das Einsetzen des Ansatzes

$$\Phi \equiv \frac{1}{\hbar}\Phi_0 + \Phi_1 + \hbar\Phi_2 + \dots$$

in Gl. (III.59) unter der Gültigkeitsbedingung $\left|\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right| \ll \left|\frac{d\Phi}{dr}\right|^2$ gibt

$$\text{- zur führenden } \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar^2}\right) \text{ Ordnung: } \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{d\Phi_0}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\hbar^2}g(r), \text{ d.h. } \Phi_0(r) = \pm \int^r \sqrt{g(r')} dr';$$

$$\text{- zur } \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right)\text{-Ordnung: } \frac{1}{\hbar}\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{\hbar}\frac{d\Phi_0}{dr}\frac{d\Phi_1}{dr} = 0, \text{ sodass } \Phi_1(r) = -\frac{1}{2}\ln\frac{d\Phi_0}{dr} = -\frac{1}{4}\ln|g(r)|, \text{ usw.}$$

Insgesamt ergibt sich also die WKB-Lösung

$$u(r) = \frac{1}{|g(r)|^{1/4}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int^r \sqrt{g(r')} dr'}. \quad (\text{III.60})$$

Im Fall des Tunneleffekts durch eine Barriere gilt

$$\frac{\sqrt{g(r)}}{\hbar} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V_{0,\alpha} + E]} \equiv K & \text{für } r < R \text{ (Gebiet I);} & (\text{III.61a}) \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V_\alpha(r) - E]} \equiv \kappa(r) & \text{für } R < r < r_c \text{ (Gebiet II);} & (\text{III.61b}) \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[E - V_\alpha(r)]} \equiv k(r) & \text{für } r > r_c \text{ (Gebiet III).} & (\text{III.61c}) \end{cases}$$

Die betreffenden reduzierten Wellenfunktionen sind

$$u_{\text{I}}(r) = A e^{iKr} + B e^{-iKr}, \quad (\text{III.62a})$$

$$u_{\text{II}}(r) = \frac{C}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left[\int_r^{r_c} \kappa(r') dr'\right] + \frac{D}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left[-\int_r^{r_c} \kappa(r') dr'\right] \quad (\text{III.62b})$$

$$\text{und } u_{\text{III}}(r) = \frac{E}{\sqrt{k(r)}} \exp\left[i\int_{r_c}^r k(r') dr'\right] + \frac{F}{\sqrt{k(r)}} \exp\left[-i\int_{r_c}^r k(r') dr'\right], \quad (\text{III.62c})$$

wobei A , B , C , D , E und F Konstanten sind, die den Kontinuitätsbedingungen

$$u_{\text{I}}(R) = u_{\text{II}}(R), \quad \frac{du_{\text{I}}}{dr}(R) = \frac{du_{\text{II}}}{dr}(R), \quad u_{\text{II}}(r_c) = u_{\text{III}}(r_c), \quad \frac{du_{\text{II}}}{dr}(r_c) = \frac{du_{\text{III}}}{dr}(r_c)$$

(entsprechend den analogen Bedingungen für die Wellenfunktionen $\psi_i(r) = u_i(r)/r$, $i = \text{I, II, III}$) genügen sollen.⁽⁶¹⁾

⁽⁶¹⁾ Bei dem klassischen Umkehrpunkt $r = r_c$ sind aber die durch Gl. (III.62b)–(III.62c) definierten Funktionen u_{II} und u_{III} unendlich, was die Ungültigkeit der Bedingung $|d^2\Phi/dr^2| \ll |d\Phi/dr|^2$ spiegelt. Statt denen soll man lokal die durch ein anderes Näherungsverfahren erhaltenen Funktionen benutzen, oder einfach $u(r) = \exp[\pm \int \sqrt{g(r')} dr']$, wobei der Integrand bei $r = r_c$ tatsächlich verschwindet.